

Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki

Andrzej Hryczuk

Nr albumu: 211 075

Aksjony w teorii cząstek elementarnych i kosmologii

Praca magisterska
na kierunku FIZYKA
w zakresie FIZYKA TEORETYCZNA

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. dra hab. Krzysztofa A. Meissnera
Instytut Fizyki Teoretycznej
Uniwersytetu Warszawskiego

Warszawa, maj 2007

Oświadczenie kierującego pracą

Oświadczam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i stwierdzam, że spełnia ona warunki do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Problematyka pracy dotyczy teorii aksjonów - pseudogoldstonowskich bozonów związanych ze spontanicznym złamaniem symetrii Peccei-Quinn, dodanej do Modelu Standardowego w celu rozwiązania problemu łamania CP w oddziaływaniach silnych. Aksjony są ponadto jednym z najlepszych kandydatów na zimną ciemną materię. W pracy znajduje się przegląd teorii Peccei-Quinn, modeli aksjonów, a także ich roli w kosmologii. Omówiony jest również aspekt fenomenologiczny i eksperymentalny, a w szczególności, od strony zarówno teoretycznej jak i doświadczalnej, eksperyment OSQAR. Przedstawione są obliczenia dla przewidywań teoretycznych jego wyników, z których wynika, iż planowana czułość eksperymentu OSQAR będzie istotnie wyższa niż we wszystkich dotychczasowych badaniach laboratoryjnych.

Słowa kluczowe

Aksjon, symetria Peccei-Quinn, OSQAR, ciemna materia.

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

13.5 Fizyka nuklearna i Fizyka wysokich energii

Tytuł pracy w języku angielskim

Axions in Particle Physics and Cosmology

Spis treści

1. Wprowadzenie	5
2. Teoria aksjonu	9
2.1. Anomalie	9
2.1.1. Anomalia ABJ	9
2.1.2. Przekształcenie miary - metoda Fujikawy	11
2.2. Problem łamania CP w oddziaływaniach silnych	15
2.2.1. Instantony	16
2.2.2. Łamanie CP	17
2.3. Mechanizm Peccei-Quinn i aksjony	21
3. Modele	23
3.1. Aksjon Peccei-Quinn-Weinberga-Wilczka	23
3.1.1. Masa aksjonu	25
3.1.2. Sprzężenie aksjonu do fotonów	28
3.2. „Niewidzialne aksjony”	29
3.2.1. KSVZ	30
3.2.2. DFSZ	32
4. Aksjon w kosmologii	35
4.1. Przejścia fazowe w kosmologii	35
4.1.1. Ściany domenowe	36
4.1.2. Kosmiczne struny	37
4.2. Produkcja aksjonów we wczesnym Wszechświecie	39
4.2.1. Aksjony termiczne	40
4.2.2. Produkcja wynikająca z niedopasowania próżni	45
4.2.3. Rozpad strun i ścian domenowych	49
4.2.4. Ograniczenia kosmologiczne na skalę łamania symetrii PQ	50
5. Fenomenologia aksjonu	51
5.1. Ograniczenia eksperymentalne	51
5.1.1. Laboratoryjne	51
5.1.2. Astrofizyczne	53
5.1.3. Kosmologiczne	54
5.2. Poszukiwania aksjonu	55
5.2.1. Haloskopy	56
5.2.2. Eksperymenty laserowe	57
5.2.3. Obserwacje astrofizyczne	64

6. OSQAR	67
6.1. Plan eksperymentu	67
6.1.1. Dwójłomność próżni	68
6.1.2. Regeneracja fotonów	70
6.2. Przewidywania teoretyczne	74
7. Podsumowanie	77
Bibliografia	79
A. Przekroje czynne	83

Rozdział 1

Wprowadzenie

Początki historii aksjonu sięgają lat 70-tych ubiegłego wieku. Opisująca oddziaływania silne chromodynamika kwantowa (QCD) była już wtedy dobrze ugruntowaną teorią, lecz pomimo niewątpliwych sukcesów, ciągle niosła ze sobą wiele nurtujących pytań. Jedną z nierozwiązanych wtedy zagadek był tzw. *problem* $U_A(1)$. Lagranżjan QCD dla N zapachów kwarków, w granicy gdy ich masy znikają $m_q \rightarrow 0$, posiada symetrię globalną $U_V(N) \times U_A(N)$. Dla kwarków u i d granica bezmasowa wydaje się być bardzo dobrze uzasadniona, gdyż zachodzi $m_u, m_d \ll \Lambda_{\text{QCD}}$. Oczekiwano więc, że przynajmniej dla tych dwóch najbliższych kwarków oddziaływania silne powinny być niezmiennicze względem symetrii $U_V(2) \times U_A(2)$. Doświadczenie pokazuje, że jeśli chodzi o część wektorową (odpowiadającą iloczynowi grup izospinowej i barionowej $U_V(2) = SU_I(2) \times U_B(1)$), to rzeczywiście jest ona przybliżoną symetrią Natury, co przejawia się w występowaniu multipletów nukleonów i pionów w spektrum hadronów. Inaczej jest jednak z częścią aksjalną $U_A(2)$. Kondensaty kwarkowe o niezerowej próżniowej wartości oczekiwanej $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle \neq 0$ powodują jej spontaniczne złamanie, co powinno skutkować w istnieniu czterech bozonów pseudogoldstonowskich. Trzy z nich zostały zidentyfikowane jako piony, jednak nie było śladu czwartego, gdyż następny w kolejności lekki hadron η jest już wyraźnie cięższy $m_\eta^2 \gg m_\pi^2$. Steven Weinberg [1] zasugerował, że może z jakiegoś powodu oddziaływania silne nie przejawiają kłopotliwej symetrii $U_A(1)$.

Powodem tym okazała się być anomalia chiralna. Występowanie anomalii, czyli łamania symetrii klasycznej przez efekty kwantowe, było znane już od kilku lat, jednak samo w sobie nie mogło doprowadzić do rozwiązania problemu $U_A(1)$. Potrzebne były do tego jeszcze prace Gerarda 't Hoofta [2] z połowy lat 70-tych, ukazujące istnienie nietrywialnych topologicznie rozwiązań instantonowych. Dopiero połączenie tych dwóch wyników pozwoliło wyjaśnić czemu masa bozonu η jest tak znacząco większa od mas pionów i tym samym rozwiązać problem $U_A(1)$.

Przy okazji jednak, zauważenie znaczenia nietrywialnej topologii teorii Yanga-Millsa spowodowało napotkanie nowej trudności. Dostrzeżono konieczność uwzględnienia w lagranżjanie QCD nowego członu łamiącego CP, co jednak stoi w sprzeczności z doświadczeniem. Problem ten został ochrzczony mianem *problemu łamania CP w oddziaływaniach silnych*. W roku 1977 Roberto Peccei i Helen Quinn zaproponowali rozwiązanie opierające się na dodaniu do Modelu Standardowego (MS) nowej globalnej symetrii chiralnej $U(1)$. Następnie Weinberg [3] i niezależnie Frank Wilczek [4] zauważyli, że symetria ta musi być spontanicznie złamana i powinien wystąpić związany z tym bozon pseudogoldstonowski. Wilczek nadał mu nazwę *aksjon*, po nazwie detergentu piorącego, gdyż jak później mawiał z uśmiechem, zawsze gdy widział proszek do prania swojej żony, czuł że aksjon to świetna nazwa dla cząstki elementarnej. Poza tym pozwolił on „wyczyścić” problem z prądem aksjalnym.

Tak rozpoczęła się historia aksjonu. Szybko jednak przekonano się, że oryginalny model Peccei-Quinn-Weinberga-Wilczka jest nie do pogodzenia z istniejącymi wynikami eksperymentalnymi. Zaczęto więc poszukiwać innej implementacji mechanizmu PQ, tak by nie powodowało to konfliktu z doświadczeniem. Na początku lat 80-tych istniały już dwa konkurencyjne modele, KSVZ [5] i DFSZ [6], w których aksjon był bardzo lekki i bardzo słabo oddziaływał z materią MS. Dlatego aksjon z tych modeli otrzymał miano „niewidzialnego”. Okazało się jednak, że wcale nie jest taki niewidzialny, gdyż nie minął nawet rok, a już powstały propozycje jak próbować wychwycić go doświadczalnie. Musiało jednak minąć kilkanaście lat nim technika pozwoliła mieć nadzieję na przeprowadzenie jakiegokolwiek znaczącego eksperymentu tego typu. Tymczasem odkryto, że aksjon świetnie nadawałby się na cząstkę budującą ciemną materię. W modelach KSVZ czy DFSZ był lekki, słabo oddziałujący i co więcej posiadał unikalny mechanizm produkcji we wczesnym Wszechświecie, pozwalający mu mimo małej masy być w momencie odprzęgania cząstką nierelatywistyczną. Tak więc uzyskano świetnego kandydata na zimną ciemną materię tak potrzebną w kosmologii, bez konieczności dużych modyfikacji MS czy ogólnej teorii względności. Teoria aksjonu przeżywała swoją drugą młodość.

Atrakcyjność tej teorii zachęcała do pracy nad możliwymi metodami poszukiwań aksjonu. Zaczęto rozważać wpływ jego ewentualnego istnienia na ewolucję obiektów astronomicznych, otrzymując tym samym silne ograniczenia na możliwe modele. Znajdowano coraz to więcej efektów, które przy odpowiedniej technice byłyby w zasadzie możliwe do sprawdzenia. Choć minęło już ponad dwadzieścia lat od pierwszych zaproponowanych eksperymentów, aż do niedawna nikomu nie udało się jednak otrzymać w doświadczeniu żadnego pozytywnego sygnału. Dopiero w zeszłym roku włoski eksperyment o nazwie PVLAS uzyskał wyniki sugerujące możliwość znalezienia nowej cząstki. Problem jednak w tym, że cząstka ta najprawdopodobniej nie mogłaby być poszukiwanym aksjonem, ze względu na zbyt silne oddziaływanie z fotonami. Niemniej jednak PVLAS wywołał poruszenie w społeczności fizyków zajmujących się aksjonami i zachęcił do konstruowania nowych eksperymentów. Zbiegło się to w czasie z zauważalnym postępem technicznym, tak że te nowe generacje eksperymentów, mające ruszyć w najbliższym czasie, dają dużo większe nadzieje na znalezienie aksjonu.

Jednym z takich eksperymentów jest OSQAR, w którym będzie brać udział grupa z Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Jego projekt [7] otrzymał pozytywną rekomendację komitetu SPSC¹ w CERN-ie i aktualnie czeka na ostateczne zatwierdzenie.

Niniejsza praca ma głównie charakter przeglądowy. W rozdziale 2 przedstawimy wprowadzenie do problemu łamania CP w oddziaływaniach silnych, poprzez omówienie anomalii chiralnej w kwantowej teorii pola i efektów instantonowych. Następnie pokażemy jak mechanizm Peccei-Quinn pozwala w lagranżjanie QCD dynamicznie zlikwidować człon łamiący CP. Rozdział 3 poświęcony jest w całości konkretnym modelom aksjonu. Przedstawimy konstrukcję modeli PQWW, KSVZ i DFSZ, otrzymamy z teorii najważniejsze parametry aksjonu, tj. jego masę i sprzężenie do fotonów oraz przedyskutujemy możliwe ich modyfikacje. Potem w rozdziale 4 przejdziemy do roli jaką aksjon pełni w kosmologii. Odpowiemy na pytanie dlaczego aksjon stanowi świetnego kandydata na zimną ciemną materię. W tym celu wyprowadzimy wzory na populację aksjonów termicznych, a także oszacowania na gęstość energii populacji reliktowych zimnych aksjonów. Następnie z tych wyników otrzymamy ograniczenia kosmologiczne na skalę łamania symetrii PQ. Kolejny rozdział tej pracy traktuje o fenomenologii. Przedstawimy istniejące ograniczenia na parametry aksjonu wynikające zarówno z rozważań teoretycznych, jak i obserwacji astrofizycznych oraz doświadczeń laboratoryjnych. Skoncentrujemy się głównie na eksperymentach laserowych, dokładnie omawiając teorię sto-

¹Scientific Policy Standing Committee

jącą u ich podstawy oraz zasadę ich działania. Otrzymamy tym samym wyniki teoretyczne, których następnie użyjemy w rozdziale 6, w całości poświęconym samemu eksperymentowi OSQAR. Fragmenty tej części niniejszej pracy zostały opublikowane w projekcie [7].

Na zakończenie wprowadzenia, poświęćmy chwilę stronie językowej. W języku polskim bardzo trudno znaleźć jakąkolwiek pracę czy to naukową, czy popularną o aksjonach i dlatego siłą rzeczy niektóre terminy angielskie w obrębie tej tematyki nie mają przyjętych polskich odpowiedników. Tak więc, postanowiliśmy na wstępie przedstawić tłumaczenia jakich używamy w tej pracy:

vacuum misalignment - niedopasowanie próżni,

misalignment production - mechanizm produkcji wynikający z niedopasowania próżni,

initial misalignment angle - początkowy kąt niedopasowania,

fine-tuning - precyzyjne dostrojenie,

scaling solution - rozwiązanie skalujące,

milicharged fermions - fermiony o ułamkowym ładunku.

Rozdział 2

Teoria aksjonu

Aksjon, jak wspomnieliśmy we wprowadzeniu, jest bozonem pseudogoldstonowskim powstałym na skutek spontanicznego złamania przybliżonej symetrii Peccei-Quinn (w skrócie PQ), dodanej do Modelu Standardowego w celu rozwiązania problemu łamania CP w oddziaływaniach silnych. Ponieważ istotna część tego problemu, jak i jego rozwiązanie, opiera się na anomalii chiralnej związanej z symetrią PQ, zaczniemy od dokładnego omówienia anomalii chiralnej w kwantowej teorii pola. Następnie w podrozdziale 2.2 przejdziemy do samego problemu łamania CP, po czym na końcu tego rozdziału przedstawimy jego rozwiązanie poprzez mechanizm PQ.

2.1. Anomalie

Symetrie oraz odpowiadające im prawa zachowania pełnią niezwykle istotną rolę w naszym rozumieniu podstawowych praw natury. Zarówno w klasycznej jak i kwantowej teorii pola wyrażają się one poprzez istnienie transformacji względem których działanie jest niezmiennicze. Jednakże w teorii kwantowej symetrie mogą mieć pewne subtelności, nie mające odpowiedników w przypadku klasycznym, bowiem występujące w niej nieskończoności wymagają użycia dodatkowo pewnej regularyzacji lub obcięcia. Ta procedura może naruszać symetrie teorii i w efekcie, choć działanie było niezmiennicze, to przewidywania fizyczne już takie być nie muszą. W takim przypadku mówimy o anomalii - łamaniu klasycznych symetrii przez efekty kwantowe.

Istnienie anomalii niesie za sobą bardzo daleko idące konsekwencje, znacznie wykraczające poza zakres niniejszej pracy (przegląd można znaleźć np. w monografii Bertlmann [8]). Tutaj omówimy jedynie najprostszy przypadek - *anomalie chiralną*, zwaną też od nazwisk jej odkrywców *anomalie Adlery-Bella-Jackiwa* (ABJ). Stanowi ona punkt wyjścia do dalszych rozważań, bowiem jak już wspomnieliśmy we wstępie, wraz z występowaniem topologicznie nietrywialnych konfiguracji pól (instantonów) fakt jej istnienia prowadzi do problemu łamania CP w oddziaływaniach silnych.

2.1.1. Anomalia ABJ

Tradycyjne podejście do obliczenia anomalii chiralnej opiera się na bezpośrednim policzeniu trójpunktowych funkcji Greena

$$\langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)j_\lambda^5(z)|0\rangle, \quad (2.1)$$

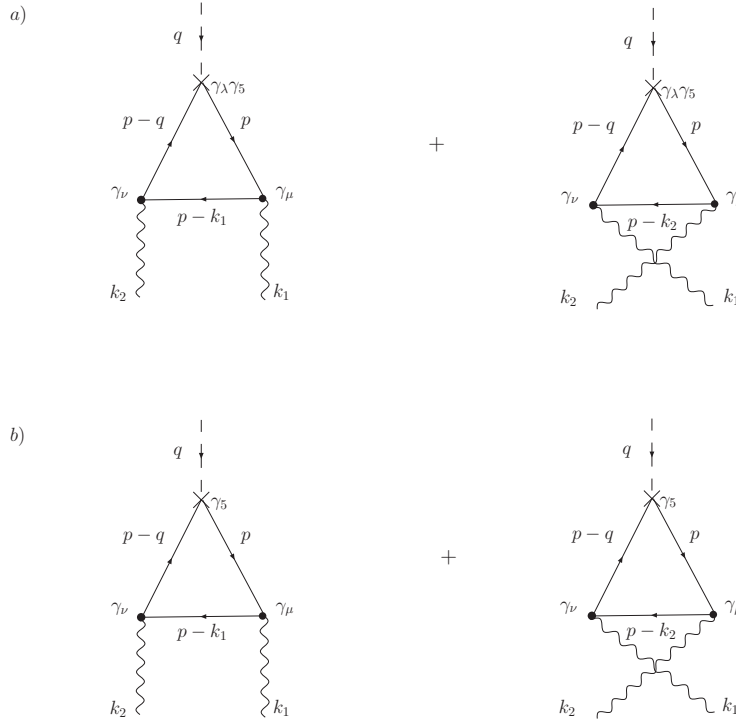
$$\langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)P(z)|0\rangle, \quad (2.2)$$

gdzie T oznacza iloczyn chronologiczny operatorów, $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ prąd wektorowy, $j_\lambda^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ prąd aksjalny oraz $P = \bar{\psi}\gamma_5\psi$ prąd pseudoskalarny. W tym celu wyrażamy je w przestrzeni pędowej

$$T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) := i \int d^4x d^4y d^4z e^{ik_1x + ik_2y - iqz} \langle 0 | T j_\mu(x) j_\nu(y) j_\lambda^5(z) | 0 \rangle, \quad (2.3)$$

$$T_{\mu\nu}(k_1, k_2) := i \int d^4x d^4y d^4z e^{ik_1x + ik_2y - iqz} \langle 0 | T j_\mu(x) j_\nu(y) P(z) | 0 \rangle, \quad (2.4)$$

po czym obliczamy korzystając ze zwykłych reguł Feynmana. Odpowiadają one słynnym diagramom trójkątnym przedstawionym na Rys. 2.1.



Rysunek 2.1: Diagramy trójkątne dające wkład do anomalii ABJ: a) wektor-wektor-pseudowektor, b) wektor-wektor-pseudoscalar.

Z drugiej strony mnożąc te amplitudy przez odpowiednie pędy i korzystając z klasycznych praw zachowania naiwnie oczekivalibyśmy otrzymania tzw. *tożsamości Warda*, aksjalnej

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2m T_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

oraz wektorowej

$$k_1^\mu T_{\mu\nu\lambda} = k_2^\nu T_{\mu\nu\lambda} = 0. \quad (2.6)$$

Wykonując bezpośredni rachunek i porównując z powyższymi tożsamościami okazuje się jednak, że nie da się spełnić obu jednocześnie - występuje anomalia. Wybierając zachowanie tożsamości wektorowej otrzymamy

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2m T_{\mu\nu} + \mathcal{A}_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

gdzie $\mathcal{A}_{\mu\nu}$ jest właśnie funkcją anomalii i wyraża się wzorem

$$\mathcal{A}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} k_1^\lambda k_2^\rho. \quad (2.8)$$

Wynik ten można przedstawić również w przestrzeni położeniowej. Otrzymamy wtedy anomalną dywergencję prądu aksjalnego

$$\partial^\mu j_\mu^5 = 2imP + \mathcal{A}, \quad (2.9)$$

gdzie anomalia ABJ (abelowa) ma postać

$$\mathcal{A} = \frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}. \quad (2.10)$$

Powyższe wyniki są niezwykle istotne w świetle dalszych rozważań, dlatego w następnym podrozdziale zamieścimy pełne ich wyprowadzenie. Pójdziemy jednak innym tokiem rozumowania niż naszkicowany powyżej, tj. metodą Fujikawy. Polega ona na obserwacji, że na skutek anomalii miara w całce po trajektoriach przestaje być niezmiennicza. Jak się później okaże, wygodnie będzie znać własności transformacyjne tejże miary przy transformacji chiralnej.

2.1.2. Przekształcenie miary - metoda Fujikawy

W formalizmie całek po trajektoriach w kwantowej teorii pola wszystkie fizyczne amplitudy można otrzymać znając funkcjonal generujący $Z[A_\mu, J]$. Wystarczy wtedy wykonać odpowiednie różniczkowania wariacyjne i wynik obłożyć stanami początkowym i końcowym. Te procedury w oczywisty sposób nie naruszają symetrii teorii. Powstaje więc pytanie jak w tym formalizmie mogą pojawić się anomalie, skoro funkcjonal generujący jest całką po trajektoriach klasycznego działania - niezmienniczego ze względu na interesujące nas transformacje. W pracy z roku 1979 Fujikawa [9] wykazał, że miara w całce po trajektoriach w wypadku istnienia anomalii nie jest niezmiennicza, a jakobian związany z jej transformacją odtwarza dokładnie wyniki otrzymane z anomalnych tożsamości Warda. Dodatkową zaletą tego podejścia jest jego niezależność od rachunku zaburzeń i tym samym są to rozważania w pełni nieperturbacyjne.

Rozważmy fermionowe pola Diraca oddziałujące z zewnętrznym nieabelowym polem wektorowym A_μ^a . Lagranżjan ma postać

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi, \quad (2.11)$$

gdzie operator Diraca

$$\mathcal{D} = \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu) \quad (2.12)$$

oraz nieabelowe pole cechowania ma postać $A_\mu = A_\mu^a T^a$, gdzie generatory T^a spełniają relacje komutacyjne

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T^c, \quad (2.13)$$

z całkowicie antysymetrycznymi stałymi struktury f^{abc} .

Gdy nie uwzględnimy źródeł fermionowych (które nie są istotne w tym rachunku, gdyż interesuje nas jedynie miara), funkcjonal generujący w przestrzeni euklidesowej ma postać¹

$$Z[A_\mu] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[\int d^4x \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi \right]. \quad (2.14)$$

Naszym celem będzie zbadanie, jak miara zmienia się pod wpływem transformacji chiralnej

$$\psi'(x) = e^{i\beta(x)\gamma^5} \psi(x), \quad (2.15)$$

$$\bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{i\beta(x)\gamma^5}. \quad (2.16)$$

¹Do przestrzeni euklidesowej przechodzimy za pomocą rotacji Wicka $x^4 = ix^0$, $\partial_4 = -i\partial_0$, $\gamma^4 = i\gamma^0$ oraz $A_4 = -iA_0$.

Podobnie jak i w przypadku bezpośrednich obliczeń za pomocą diagramów Feynmana, w dalszych rachunkach potrzebna będzie pewna forma regularyzacji. Oczywiście chcemy ją wybrać tak, by nie naruszała niezmienniczości ze względu na transformacje cechowania pola A_μ . Rozsądnie więc od razu pracować w bazie funkcji zachowującej tę niezmienniczość. W tym celu wybierzmy bazę funkcji własnych operatora Diraca i rozłóżmy w niej pola fermionowe:

$$\psi(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x) = \sum_n a_n \langle x|n\rangle, \quad (2.17)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_m \varphi_m^\dagger(x) \bar{b}_m = \sum_m \langle m|x\rangle \bar{b}_m. \quad (2.18)$$

Współczynniki rozkładu a_n oraz \bar{b}_m są niezależnymi zmiennymi grassmannowskimi. Dla prostej zakładamy, że operator \mathcal{D} ma czysto dyskretne spektrum. Odpowiada to stereograficznemu rzutowaniu czterowymiarowej przestrzeni Euklidesa na czterowymiarową sferę (co istotne, ta procedura nie powoduje zmian zależnych od pola cechowania). Wtedy równanie własne ma postać

$$i\mathcal{D}\varphi_n(x) = \lambda_n \varphi_n(x), \quad (2.19)$$

gdzie wartości własne $\lambda_n \in \mathbb{R}$ (w przestrzeni euklidesowej operator Diraca jest hermitowski). Baza funkcji własnych operatora $i\mathcal{D}$ jest ortogonalna i zupełna:

$$\int d^4x \varphi_m^\dagger(x) \varphi_n(x) = \int d^4x \langle m|x\rangle \langle x|n\rangle = \langle m|n\rangle = \delta_{mn}, \quad (2.20)$$

$$\sum_n \varphi_n(y) \varphi_n^\dagger(x) = \sum_n \langle y|n\rangle \langle n|x\rangle = \delta^4(y-x). \quad (2.21)$$

W całce fermionowej miara zmienia się jak odwrotność jacobianu, łatwo można więc pokazać, że otrzymamy

$$\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} = \prod_n da_n \prod_m d\bar{b}_m, \quad (2.22)$$

natomiast działanie

$$\int d^4x \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi = \int d^4x \sum_m \varphi_m^\dagger \bar{b}_m \sum_n (i\lambda_n - m) a_n \varphi_n = \sum_n (i\lambda_n - m) \bar{b}_n a_n. \quad (2.23)$$

Otrzymujemy więc wzór na funkcjonal generujący

$$\begin{aligned} Z[A_\mu] &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left(\int d^4x \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi\right) \\ &= \int \prod_n da_n \prod_m d\bar{b}_m \exp\left[\sum_n (i\lambda_n - m) \bar{b}_n a_n\right] \\ &= \det\left[\sum_n (i\lambda_n - m)\right] = \sum_n (i\lambda_n - m), \end{aligned} \quad (2.24)$$

gdzie w przedostatniej równości skorzystaliśmy z własności fermionowej całki gaussowskiej

$$\int d\alpha d\bar{\alpha} e^{\bar{\alpha} D \alpha} = \det D. \quad (2.25)$$

Wykonajmy teraz transformację chiralną daną przez (2.15) i (2.16):

$$|\psi'\rangle = e^{i\beta(x)\gamma^5} |\psi\rangle = e^{i\beta(x)\gamma^5} \sum_n a_n |n\rangle. \quad (2.26)$$

Z drugiej strony rozkładając przetransformowany stan w bazie stanów własnych operatora Diraca dostaniemy

$$|\psi'\rangle = \sum_n a'_n |n\rangle. \quad (2.27)$$

Porównując stronami, mnożąc lewostronnie przez $\langle m|$ i korzystając z ortogonalności (2.20) otrzymujemy

$$\sum_n a_n \langle m|e^{i\beta(x)\gamma^5}|n\rangle = \sum_n a'_n \langle m|n\rangle = a'_m, \quad (2.28)$$

czyli

$$a'_n = \sum_m C_{mn} a_m \quad \text{gdzie} \quad C_{mn} = \langle m|e^{i\beta(x)\gamma^5}|n\rangle \equiv \langle m|C|n\rangle. \quad (2.29)$$

Analogicznie z rotacji spinora $\bar{\psi}$ otrzymalibyśmy

$$\bar{b}'_m = \sum_n C_{nm} \bar{b}_n. \quad (2.30)$$

Tak więc pod wpływem transformacji chiralnej

$$\mathcal{D}\psi'\mathcal{D}\bar{\psi}' = \prod_n da'_n \prod_m d\bar{b}'_m = (\det C)^{-2} \prod_n da_n \prod_m d\bar{b}_m = (\det C)^{-2} \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}. \quad (2.31)$$

W następnym kroku skorzystamy ze związku

$$\det C = \exp[\text{Tr} \ln C], \quad (2.32)$$

co pozwoli na zbadanie jakobianu transformacji:

$$\begin{aligned} (\det C)^{-2} = \exp[-2\text{Tr} \ln C] &= \exp\left(-2 \sum_n \langle n|i\beta(x)\gamma^5|n\rangle\right) \\ &= \exp\left(-2i \int dx \beta(x) \sum_n \varphi_n^\dagger(x) \gamma^5 \varphi_n(x)\right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

W tym miejscu potrzebujemy wykonać regularyzację, gdyż ślad pod całką jest źle określony. Z relacji ortogonalności (2.21) otrzymujemy funkcję delta, jednak ślad macierzy γ^5 znika:

$$\sum_n \varphi_n^\dagger(x) \gamma^5 \varphi_n(x) = \text{tr} \gamma^5 \delta(0). \quad (2.34)$$

Wybieramy regularyzację tak, by nie naruszała niezmienniczości ze względu na transformację cechowania dla pola A_μ . Za Fujikawą zastosujemy dla dużych wartości własnych λ_n obcięcie gaussowskie², tj. wprowadzamy wagę postaci $\exp(-\lambda_n^2/M^2)$, po czym po wykonaniu rachunków przejdziemy do granicy $M \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \sum_n \varphi_n^\dagger(x) \gamma^5 \varphi_n(x) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \varphi_n^\dagger(x) \gamma^5 \exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{M^2}\right) \varphi_n(x) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \varphi_n^\dagger(x) \gamma^5 \exp\left(-\frac{D^2}{M^2}\right) \varphi_n(x). \end{aligned} \quad (2.35)$$

²W ogólności może to być dowolna gładka funkcja $f(D^2/M^2)$, taka że

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 & f(\infty) &= 0 \\ x f'(x) &= 0 & \text{dla } x &= 0 \text{ oraz } x = \infty \end{aligned}$$

Np. wybór $f(\lambda_n^2/M^2) = \frac{1}{1+\lambda_n^2/M^2}$ odpowiada regularyzacji Pauliego-Villarsa.

Wprowadzając transformatę Fouriera

$$\varphi_n(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} e^{ikx} \tilde{\varphi}_n(k) \quad (2.36)$$

i wstawiając ją do (2.35) dostajemy

$$\sum_n \varphi_n^\dagger(x) \gamma^5 \varphi_n(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k d^4 p}{(2\pi)^4} \sum_n \tilde{\varphi}_n^\dagger(k) e^{-ikx} \gamma^5 \exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{M^2}\right) e^{ipx} \tilde{\varphi}_n(p). \quad (2.37)$$

Wykonując sumę pod całką i korzystając po raz kolejny z ortogonalności otrzymamy

$$\sum_n \varphi_n^\dagger(x) \gamma^5 \varphi_n(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[e^{-ikx} \gamma^5 \exp\left(-\frac{\lambda_n^2}{M^2}\right) e^{ikx} \right], \quad (2.38)$$

gdzie Tr oznacza ślad zarówno po macierzach gamma jak i generatorach T^a . By pójść dalej, skorzystajmy z rozkładu kwadratu operatora Diraca oraz faktu, iż komutator pochodnych kowariantnych daje tensor pola $[D_\mu, D_\nu] = gF_{\mu\nu}$

$$\mathcal{D}^2 = \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu = \left(\frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right) D_\mu D_\nu = D_\mu D^\mu + \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] gF_{\mu\nu}. \quad (2.39)$$

Stąd:

$$\begin{aligned} \sum_n \varphi_n^\dagger(x) \gamma^5 \varphi_n(x) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[e^{-ikx} \gamma^5 \exp\left(-\frac{1}{M^2} (D_\mu D^\mu + \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] gF_{\mu\nu})\right) e^{ikx} \right] \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^5 \exp\left(-\frac{(D_\mu + ik_\mu)(D^\mu + ik^\mu)}{M^2} - \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu gF_{\mu\nu}}{2M^2}\right) \right] \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} M^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{k_\mu k^\mu} \text{Tr} \left[\gamma^5 \exp\left(-\frac{2ik_\mu D^\mu}{M} - \frac{D_\mu D^\mu}{M^2} - \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu gF_{\mu\nu}}{2M^2}\right) \right], \end{aligned}$$

gdzie w drugiej równości skorzystaliśmy z działania operatora różniczkowego obłożonego falami płaskimi:

$$e^{-ikx} f(\partial_\mu) e^{ikx} = f(\partial_\mu + ik_\mu), \quad (2.40)$$

natomiast w ostatniej pęd został przeskalowany $k_\mu \rightarrow Mk_\mu$, skąd czynnik M^4 . By policzyć ślad przypomnijmy trzy własności śladów iloczynów macierzy gamma (w naszej konwencji w przestrzeni euklidesowej $\epsilon^{1234} = 1$):

$$\text{tr} \gamma^5 = \text{tr} \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu = 0 \quad (2.41)$$

$$\text{tr} \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta = -4\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (2.42)$$

Czyli w granicy $M \rightarrow \infty$, niezerowy wkład da jedynie człon kwadratowy w $\gamma^\mu \gamma^\nu gF_{\mu\nu}$. Tak więc rozwijając eksponens w szereg i pomijając człony niedające wkładu, otrzymamy

$$\sum_n \varphi_n^\dagger(x) \gamma^5 \varphi_n(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2!} \frac{M^4}{(2M^2)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{k_\mu k^\mu} g^2 \text{Tr} (\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}). \quad (2.43)$$

W przestrzeni euklidesowej na skutek rotacji Wicka mamy $k_\mu k^\mu = -k_\mu k_\mu$ więc

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{k_\mu k^\mu} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-k^2} \right)^4 = \frac{1}{16\pi^2}, \quad (2.44)$$

skąd ostatecznie po obliczeniu śladu po macierzach Diraca otrzymujemy

$$\sum_n \varphi_n^\dagger(x) \gamma^5 \varphi_n(x) = -\frac{g^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \quad (2.45)$$

Oznacza to, że zmiana miary fermionowej w euklidesowej całce po trajektoriach pod wpływem transformacji chiralnej dana jest wyrażeniem

$$\mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' = \exp \left[- \int dx \beta(x) \mathcal{A}[A_\mu](x) \right] \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}, \quad (2.46)$$

gdzie funkcja anomalii

$$\mathcal{A}[A_\mu](x) = -\frac{ig^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \quad (2.47)$$

Przechodząc do przestrzeni Minkowskiego (przy konwencji $\epsilon^{0123} = 1$) musimy pomnożyć ten wynik przez i , tak więc (dla anomalii abelowej) odtwarzamy wynik, jaki otrzymalibyśmy z bezpośredniego rachunku (2.10).

2.2. Problem łamania CP w oddziaływaniach silnych

W poprzednim rozdziale pokazaliśmy, że istnienie anomalii ABJ powoduje zmianę miary całkowania (w przestrzeni euklidesowej) pod wpływem transformacji chiralnej

$$\mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' = \exp \left[\frac{ig^2}{16\pi^2} \int dx \beta(x) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right] \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}. \quad (2.48)$$

Jest to równoważne dodaniu do gęstości lagranżjanu członu

$$\mathcal{L}_{anom} = \frac{ig^2}{16\pi^2} \beta(x) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \quad (2.49)$$

Dla transformacji *globalnych* człon ten jest pełną pochodną i wydawałoby się, że po wycalkowaniu nie powinien dawać wkładu do działania. Istotnie, definiując prąd

$$K^\mu = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu (F_{\alpha\beta}^a - \frac{g}{3} \epsilon^{abc} A_\alpha^b A_\beta^c), \quad (2.50)$$

można łatwo pokazać, że zachodzi równość:

$$\partial_\mu K^\mu = F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{a\mu\nu}, \quad (2.51)$$

gdzie tensor dualny $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$. Jednak jakkolwiek \mathcal{L}_{anom} stanowi pełną pochodną, to dla teorii nieabelowej wnosi niezerowy wkład do działania. Istnieją bowiem nietrywialne topologiczne rozwiązania instantonowe, dla których człon brzegowy nie znika. Co więcej, poniżej pokażemy, że te rozwiązania efektywnie dodają do gęstości lagranżjanu człon z jednym wolnym parametrem θ

$$\mathcal{L}_\theta = -\frac{g^2 \theta}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^a, \quad (2.52)$$

który zachowuje sprzężenie ładunkowe C, lecz łamie parzystość P i odbicie czasowe T. Oznacza to, że jeśli $\theta \neq 0$ to teoria przewiduje niezachowanie symetrii CP, nieobserwowane w doświadczeniu. Stąd *problem łamania CP w oddziaływaniach silnych*. Zaczniemy od pokazania genezy członu \mathcal{L}_θ , po czym w kolejnym podrozdziale bardziej dogłębnie przedyskutujemy implikacje jakie za sobą niesie.

2.2.1. Instantony

Instantony to rozwiązania klasycznych równań ruchu w przestrzeni euklidesowej. Opisują one przejścia pomiędzy klasycznymi minimami o różnej strukturze topologicznej. Działanie dla konfiguracji pól odpowiadającej rozwiązaniu instantonowemu ma skończoną wartość, musimy więc uwzględnić te konfiguracje korzystając z formalizmu całek po trajektoriach (jak poprzednio rachunki wykonywać będziemy w przestrzeni euklidesowej). Jesteśmy zainteresowani jedynie takimi konfiguracjami (o skończonym działaniu), gdyż w przybliżeniu kwaziklasycznym jedynie te konfiguracje dają niezerowy wkład.

Rozważmy wszystkie konfiguracje pól o skończonym działaniu, tzn. niekoniecznie będące rozwiązaniami klasycznych równań ruchu. Z dokładnością do nieistotnych w tym rozumowaniu stałych, działanie jest dane przez całkę

$$S \propto \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.53)$$

której zbieżność zależy od zachowania pola A_μ gdy $r \rightarrow \infty$, gdzie r to radialna współrzędna w czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej. Dla prostoty założymy, że dla dużych r pole A_μ można rozwinąć w szereg względem $\frac{1}{r}$ (wnioski będą prawdziwe również bez tego założenia [10]). Działanie jest skończone gdy $F_{\mu\nu}$ w nieskończoności znika szybciej niż r^{-2} . Nie oznacza to jednak, jak można by naiwnie sądzić, że A_μ powinno być $O(\frac{1}{r^2})$, gdyż znikanie $F_{\mu\nu}$ nie implikuje znikania A_μ , a oznacza jedynie, że pole A_μ jest „czystym cechowaniem”, czyli ma postać

$$A_\mu = g \partial_\mu g^{-1} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (2.54)$$

gdzie g jest funkcją jedynie zmiennych kątowych o wartościach w grupie cechowania G . Tak więc z każdą konfiguracją pól o skończonym działaniu związany jest element grupy g zależny tylko od kątów, czyli innymi słowy mapa S^3 w G . Oczywiście nie wszystkie konfiguracje tej postaci są od siebie niezależne. Transformacja cechowania przekształca element grupy $g(x)$:

$$g(x) \rightarrow h(x)g(x) + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (2.55)$$

W istocie, niech grupa cechowania $G = SU(2)$, wtedy z każdą konfiguracją pól związana jest mapa $S^3 \rightarrow S^3$. Topologicznie niezależne odwzorowania sfery trójwymiarowej w siebie numerowane są liczbami całkowitymi, gdyż trzecia grupa homotopii grupy $SU(2)$ to właśnie \mathbb{Z} , tj. $\pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$ (ogólniej $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$). Można pokazać, że liczbą numerującą te niezależne konfiguracje (mapy) jest tzw. *liczba nawinięć* (związana jest ona z tym, ile razy dana mapa „nawija”, w tym przypadku S^3 na S^3) lub inaczej *indeks Pontryagina*

$$\nu = -\frac{g^3}{24\pi^2} \int d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \text{Tr}(\epsilon_{ijk} A^i A^j A^k), \quad (2.56)$$

gdzie całkujemy po zmiennych kątowych na sferze trójwymiarowej. Liczbę nawinięć można wyrazić w bardziej użytecznej postaci korzystając z równania (2.51)

$$\int d^4x F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \int d^4x \partial_\mu K^\mu = \int d^3S K^\mu n_\mu, \quad (2.57)$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z prawa Gaussa. Następnie podstawiając wyrażenie na prąd K^μ (2.50)

$$\int d^4x F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \int d^3S n_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left(A_\nu^a F_{\alpha\beta}^a - \frac{1}{3} g \epsilon^{abc} A_\nu^a A_\alpha^b A_\beta^c \right). \quad (2.58)$$

Ponieważ na brzegu tensor pola znika to pierwszy człon nie daje wkładu, drugi natomiast z dokładnością do czynnika multiplikatywnego jest równy własnie liczbie nawinięć (2.56). Ostatecznie

$$\nu = \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (2.59)$$

W świetle powyższych rozważań widać, że pojęcie próżni wymaga pewnego uściślenia. Możemy bowiem mieć różne stany, które bez uwzględniania topologii byłyby identyczne i odpowiadały klasycznej próżni. Te tzw. *n-próżnie* sklasyfikowane są przez indeks Pontryagina i oznaczane przez

$$\dots | - 2 \rangle, | - 1 \rangle, | 0 \rangle, | 1 \rangle, \dots, | n \rangle, \dots \quad (2.60)$$

Dla przykładu próżnia odpowiadająca instantonowemu rozwiązaniu BPST (i rozwiązaniom mu równoważnym ze względu na transformacje cechowania) należy do próżni $|1\rangle$, w ogólności zaś próżnia $|n\rangle$ posiada indeks Pontryagina $\nu = n$. Jednak powyższe stany nie są niezmiennicze ze względu na wszystkie możliwe transformacje cechowania. Innymi słowy, istnieją takie transformacje cechowania, które zamieniają próżnię $|n\rangle$ na $|n \pm k\rangle$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Toteż prawdziwą, niezmienniczą ze względu na cechowanie próżnią okazuje się być kombinacja liniowa *n-próżni* (podobną sytuację spotykamy w układach kwantowo-mechanicznych z periodycznym potencjałem), tzw. *θ -próżnia*:

$$|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} |n\rangle. \quad (2.61)$$

Kąt θ jest tutaj swobodnym parametrem, numerującym różne możliwe próżnie. Postać czynnika wagowego wynika z faktu, że transformacje cechowania opisane są operatorami unitarnymi, więc wartość własna operatora zamieniającego próżnię $|n\rangle$ na $|n \pm k\rangle$ jest postaci $e^{ik\theta}$. Na koniec warto zaznaczyć, że z (2.61) wynika, iż θ jest zmienną okresową, tj.

$$|\theta\rangle = |\theta + 2\pi\rangle. \quad (2.62)$$

2.2.2. Łamanie CP

Opisane powyżej rozwiązania trzeba oczywiście uwzględnić przy obliczaniu całek po trajektoriach. Otwartą pozostaje jednakże jeszcze kwestia w jaki sposób należy to uczynić. Przytoczymy tutaj argument zaczerpnięty od Weinberga [11]. Przypuśćmy wpierw, że rozwiązania instantonowe uwzględniamy z dowolnym czynnikiem wagowym $f(\nu)$. Wtedy wartość oczekiwana pewnej obserwabli \mathcal{O} o nośniku w dużej objętości Ω czasoprzestrzeni euklidesowej wynosi

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\sum_{\nu} f(\nu) \int_{\nu} \mathcal{D}\phi \exp(\int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}) \mathcal{O}(\phi)}{\sum_{\nu} f(\nu) \int_{\nu} \mathcal{D}\phi \exp(\int_{\Omega} d^4x \mathcal{L})}, \quad (2.63)$$

gdzie indeks ν przy całce oznacza, że uwzględniamy w niej jedynie te konfiguracje pól, dla których liczba nawinięć wynosi ν . Przypuśćmy teraz, że obszar Ω składa się z dwóch dużych podobszarów $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ oraz, że obserwabla \mathcal{O} przyjmuje niezerową wartość jedynie w obszarze Ω_1 . Pomijając efekty brzegowe na granicy tych dwóch podobszarów, jako potencjalnie niewielkie, możemy równanie (2.63) przybliżyć przez:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\sum_{\nu_1, \nu_2} f(\nu_1 + \nu_2) \int_{\nu_1} \mathcal{D}\phi \exp(\int_{\Omega_1} d^4x \mathcal{L}) \mathcal{O}(\phi) \int_{\nu_2} \mathcal{D}\phi \exp(\int_{\Omega_2} d^4x \mathcal{L})}{\sum_{\nu_1, \nu_2} f(\nu_1 + \nu_2) \int_{\nu_1} \mathcal{D}\phi \exp(\int_{\Omega_1} d^4x \mathcal{L}) \int_{\nu_2} \mathcal{D}\phi \exp(\int_{\Omega_2} d^4x \mathcal{L})}, \quad (2.64)$$

gdzie sumujemy po takich ν_1 i ν_2 , które spełniają warunek $\nu_1 + \nu_2 = \nu$. Gdyby teraz od początku pominąć obszar Ω_2 i liczyć średnią jedynie po obszarze Ω_1 , wtedy wynik w ogólności nie byłby zgodny z powyższym. Oznacza to, że aby otrzymać skracanie się czynników

wagowych, musimy mieć własność

$$f(\nu_1 + \nu_2) = f(\nu_1)f(\nu_2), \quad (2.65)$$

która zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy czynnik ten ma postać

$$f(\nu) = e^{i\theta\nu}, \quad (2.66)$$

gdzie θ jest pewnym swobodnym parametrem. Korzystając teraz z reprezentacji całkowej liczby nawinięć (2.59) mamy

$$f(\nu) = \exp\left(\frac{ig^2\theta}{64\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}\right). \quad (2.67)$$

(W przestrzeni Minkowskiego mielibyśmy dodatkowo znak "-", gdyż dla konwencji $\epsilon^{1230} = -1$, mamy $d^4x \rightarrow id^4x$, $F_{34} \rightarrow iF_{30}$.) Zatem w przestrzeni Minkowskiego efektywnie oznacza to dodanie do gęstości lagranżjanu członu (2.52)

$$\mathcal{L}_\theta = -\frac{g^2\theta}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^a. \quad (2.68)$$

Warto podkreślić, że człon taki można było od razu dodać do gęstości lagranżjanu teorii nieabelowej, gdyż jest zgodny ze wszystkimi niezbędnymi symetriami. Powodem, dla którego pierwotnie go pominięto, był fakt, że stanowi on pełną pochodną i wydawało się, że nie zmienia przewidywań fizycznych. Dopiero prace 't Hoofta [2] pokazujące znaczenie konfiguracji pól o niezerowej liczbie nawinięć wykazały, że jednak trzeba ten człon uwzględnić.

Włączenie członu \mathcal{L}_θ do gęstości lagranżjanu ma istotne konsekwencje fizyczne. By to zobaczyć, rozważmy wpływ redefinicji wszystkich pól fermionowych

$$\psi_i \rightarrow \exp(i\gamma^5 \alpha_i) \psi_i, \quad (2.69)$$

gdzie i jest wskaźnikiem numerującym zapachy, natomiast α_i to pewien zbiór parametrów rzeczywistych. Powyższa transformacja jest transformacją chiralną, powoduje więc zmianę miary całkowania względem pól fermionowych w całce po trajektoriach (2.48)

$$\mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' = \exp\left[\frac{ig^2}{16\pi^2} \int dx \sum_i \alpha_i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}\right] \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}. \quad (2.70)$$

Widzimy, że jest to równoważne z przesunięciem parametru θ we wzorze (2.68)

$$\theta \rightarrow \theta + 2 \sum_i \alpha_i \quad (2.71)$$

(czynnik 2 wynika stąd, że w przyjętej konwencji $\text{Tr}(T^a T^b) = \delta^{ab}/2$). Oczywiście nie jest to jedyny efekt redefinicji pól fermionowych. Zmieni ona także człony masowe w gęstości lagranżjanu. Zapisując je w postaci jawnie oddzielającej pola lewochiralne od prawochiralnych

$$\mathcal{L}_{mass} = - \sum_i m_i \bar{\psi}_L^i \psi_R^i - \sum_i m_i^* \bar{\psi}_R^i \psi_L^i. \quad (2.72)$$

zmiana wywołana transformacją (2.69) to

$$m_i \rightarrow \exp(2i\alpha_i) m_i. \quad (2.73)$$

W ogólności, jeśli oprócz chromodynamiki kwantowej uwzględnimy oddziaływania słabe, macierz masy kwarków m_{ij} staje się zespolona

$$\mathcal{L}_{mass} = - \sum_{i,j} \bar{q}_L^i m_{ij} q_R^j - \sum_{i,j} \bar{q}_R^i m_{ij}^* q_L^j. \quad (2.74)$$

By przejść do bazy fizycznej trzeba najpierw tę macierz zdiagonalizować przez odpowiednie obroty pól kwarków, a potem wykonać transformację chiralną. Po diagonalizacji otrzymujemy macierz

$$m = \begin{bmatrix} m_u e^{-i\delta_u} & & & 0 \\ & m_d e^{-i\delta_d} & & \\ & & m_s e^{-i\delta_s} & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Następnie wykonujemy obrót chiralny o δ_u dla kwarku u itd., razem zamieniając kąt θ o sumę faz w powyższej macierzy. Można tę zmianę zapisać ogólnie jako dodanie $\text{Arg det } m$, czyli w pełnej teorii wprowadzamy zmieniony parametr

$$\bar{\theta} = \theta + \text{Arg det } m, \quad (2.76)$$

który występuje zamiast θ w dodatkowym członie \mathcal{L}_θ . Parametr ten jest sumą dwóch składowych o zupełnie różnym pochodzeniu - θ związana jest z nieperturbacyjnymi efektami w QCD, natomiast $\text{Arg det } m$ z uwzględnieniem oddziaływań słabych.

Z powyższych rozważań płyną następujące wnioski. Po pierwsze, nietrywialna topologia przestrzeni Yanga-Millsa powoduje dodanie do gęstości lagranżjanu QCD członu jawnie naruszającego P i T (redefinicja pól fermionowych powodująca jego zniknięcie prowadzi do zespolonych członów masowych). Tak więc z twierdzenia CPT wynika, że złamane jest również CP. Po drugie, efekt ten nie występuje jeśli masa co najmniej jednego kwarku wynosi dokładnie zero. W takim przypadku można by bowiem było wykonać transformację chiralną sprowadzającą $\theta \rightarrow 0$ redefiniując jedynie pole tegoż kwarku, co jednak nie spowodowałoby innej zmiany w obliczu braku członu masowego dla tego kwarku. I wreszcie po trzecie, parametr $\bar{\theta}$, do którego łamanie P i CP jest proporcjonalne, jest sumą dwóch zupełnie różnych członów, więc aby sam z siebie był równy (bądź bardzo bliski) zeru potrzeba precyzyjnego dostrojenia.

Z doświadczenia wiemy tymczasem, że rzeczywiście kąt $\bar{\theta}$ musi być bardzo mały. Człon \mathcal{L}_θ narusza P i T, co prowadzi do niezerowego momentu dipolowego proporcjonalnego do $|\bar{\theta}|$ oraz m_π^2 . Tak więc ze względów wymiarowych

$$d_n \approx |\bar{\theta}| e \frac{m_\pi^2}{m_N^3} \approx 10^{-16} |\bar{\theta}| e \text{ cm},$$

gdzie m_N jest tutaj typową skalą chromodynamiki kwantowej. Tymczasem eksperymentalnie mierzone ograniczenie na wartość elektrycznego momentu dipolowego neutronu wynosi obecnie (patrz np. [12])

$$d_n < 10^{-25} e \text{ cm}.$$

Aby uniknąć sprzeczności z eksperymentem, wartość parametru $\bar{\theta}$ musi spełniać zależność

$$|\bar{\theta}| < 3 \cdot 10^{-10} \quad \text{lub} \quad |\bar{\theta} - \pi| < 3 \cdot 10^{-10}. \quad (2.77)$$

Dokładniejszą analizę przewidywań teoretycznych można przeprowadzić wykonując rotację chiralną przekształcającą \mathcal{L}_θ w człon masowy (zespolony) dla kwarków:

$$\mathcal{L}_{CP-viol} = \frac{i}{2} \theta m_q (\bar{u} \gamma^5 u + \bar{d} \gamma^5 d). \quad (2.78)$$

Następnie można skorzystać z powyższego lagranżjanu i policzyć moment dipolowy neutronu poprzez równanie [13]

$$d_n \bar{n} \sigma_{\mu\nu} k^\nu \gamma^5 n = \langle n | T(J_\mu^{em} i \int d^4x \mathcal{L}_{CP-viol}) | n \rangle. \quad (2.79)$$

Żeby oszacować powyższe wyrażenie, do elementu macierzowego wstawia się rozkład jedynki i z pełnego zbioru stanów wybiera się te dające największy wkład. Dla przykładu Baluni [14] użył nieparzystych stanów $|N_{1/2}^- \rangle$ sprzężonych do neutronu przez $\mathcal{L}_{CP-viol}$. Trochę inną metodę zasotsował Crewther wraz ze współpracownikami [15], jednak wyniki obu tych rachunków są zbliżone i dają

$$d_n \approx \begin{cases} 2, 7 \cdot 10^{-16} \bar{\theta} & [14] \\ 5, 2 \cdot 10^{-16} \bar{\theta} & [15] \end{cases} \quad (2.80)$$

Wniosek jest ten sam co powyżej i wyraża się w pytaniu: dlaczego kąt $\bar{\theta}$ jest taki mały?

W ciągu ponad trzydziestu lat od postawienia tego pytania zaproponowano wiele możliwych rozwiązań, jednak jak dotąd nie udało się żadnego potwierdzić eksperymentalnie. Najbardziej eleganckim i obiecującym modelem pozostaje model Roberta Peccei i Helen Quinn [16] opierający się na dodaniu do lagranżjanu QCD dodatkowej symetrii chiralnej $U(1)$. Temu mechanizmowi jak i jego konsekwencjom poświęcimy następne rozdziały, wpierw jednak przedstawimy pokrótce inne możliwości. Istnieją trzy główne podejścia:

- 1) Dynamika próżni
- 2) Spontaniczne łamanie CP
- 3) Dodatkowa symetria chiralna

Rozwiązanie Peccei-Quinn jest oczywiście typu 3, jednak dodatkowa symetria chiralna istniałaby również bez rozszerzania Modelu Standardowego, w wypadku gdyby choć jeden kwark był ściśle bezmasowy. Powstały różne modele zakładające $m_u = 0$ (patrz np. [17]), jednak po pierwsze, tego typu rozwiązanie jakby przesuwają problem - bo w takim razie powstaje pytanie czemu jeden kwark miałby być dokładnie bezmasowy? - po drugie zaś, doświadczenie jest w bardzo dobrej zgodności z teorią dla której $m_u \neq 0$.

Rozważania typu 1, zakładające pewną nietrywialną dynamikę próżni, starają się rozwiązać problem łamania CP na gruncie samej QCD. Dla przykładu powstały modele (np. [18]) mówiące, że warunki brzegowe dające efektywny człon \mathcal{L}_θ są artefaktem, jednak tego typu propozycje przywracają z powrotem problem $U_A(1)$. Inne podejścia opierają się na obserwacji, że energia θ -próżni jest proporcjonalna do $1 - \cos \theta$ oraz na założeniu, że prawdziwa teoria powinna mieć próżnię o najmniejszej energii. Żądanie to jednak wydaje się być nieuzasadnione.

Zdecydowanie najciekawszą propozycją obok modelu PQ jest spontaniczne łamanie CP (lub w niektórych modelach samego P). W takim przypadku już na poziomie samego lagranżjanu można wybrać $\bar{\theta} = 0$. Kłopot w tym, że poprawki pętlowe generują niezerową wartość $\bar{\theta}$ i aby w ogólności spełnić ograniczenie (2.77) trzeba także zapewnić jego znikanie na poziomie jednopętlowym. Chociaż istnieją modele gdzie ten warunek jest spełniony (bardzo dobry przegląd można znaleźć w [19]), to takie modele potrzebują co najmniej dwóch dubletów Higgsa z zespolonymi próżniowymi wartościami oczekiwanymi. Prowadzi to do problemów z prądami neutralnymi zmieniającymi zapach (FCNC) i ścianami domenowymi w kosmologii. Jednak największą wadą tych rozwiązań jest fakt, że doświadczenie znajduje się w bardzo dobrej zgodności z teorią Cabbibo-Kobayashi-Maskawy (CKM), w której CP jest łamane *explicite*, nie zaś spontanicznie.

2.3. Mechanizm Peccei-Quinn i aksjony

Rozwiązanie zaproponowane przez Peccei i Quinn opiera się na obserwacji, iż dodanie do lagranżjanu QCD nowej globalnej symetrii chiralnej (nazwanej $U_{PQ}(1)$) powoduje zamianę statycznego parametru $\bar{\theta}$ zmienną dynamiczną $\frac{a(x)}{f_a}$. Pole $a(x)$ opisuje pseudoskalarny bozon pseudogoldstonowski powstały na skutek spontanicznego złamania symetrii PQ, czyli *aksjon*, natomiast stała f_a jest związana ze skalą łamania symetrii PQ i *a priori* ma dowolną wartość. Zamiana ta następuje, gdyż złamanie takiej symetrii powoduje efektywnie dodanie do lagranżjanu członu postaci $a'F\tilde{F}$, w który możemy wciągnąć człon \mathcal{L}_θ poprzez redefinicję

$$a(x) \rightarrow a'(x) + \bar{\theta}f_a. \quad (2.81)$$

Konsekwencje tego faktu są ogromne. O ile w przypadku gdy kąt $\bar{\theta}$ jest parametrem statycznym parametryzuje on różne teorie, to gdy staje się zmienną dynamiczną, zaczyna klasyfikować różne stany próżni o różnych energiach w obrębie jednej teorii. Oznacza to, że prawdziwa próżnia występować będzie dla minimum potencjału dla pola $a(x)$. Poniżej pokażemy³, że w istocie zachodzi to dla $\bar{\theta} = 0$, więc bez względu na początkową wartość $\bar{\theta}$, w stanie równowagi ustali się ona w zerze (bez potrzeby precyzyjnego dostrojenia). Rozwiązuje to problem łamania CP.

Rozważmy w tym celu sytuację po złamaniu symetrii $U_{PQ}(1)$, gdzie mamy pola gluonowe $G_{\mu\nu}^a$, aksjon a i masywne kwarki q_i . Gęstość lagranżjanu ma postać

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu a \partial^\mu a + \sum_i \bar{q}_i (i \not{D} - m_i) q_i + \frac{g^2}{32\pi^2 f_a} a G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}, \quad (2.82)$$

gdzie człon \mathcal{L}_θ wciągnęliśmy za pomocą (2.81). W dalszych rozważaniach pominiemy oddziaływania słabe i elektromagnetyczne, gdyż dają one bardzo mały wkład. Okazuje się bowiem, że uwzględniając oddziaływania słabe otrzymuje się poprawkę do kąta $\bar{\theta}$ rzędu 10^{-14} [20], co jest wartością o kilka rzędów wielkości mniejszą niż dostępne ograniczenia wynikające z eksperymentów.

Wiadomo, że energia $\bar{\theta}$ -próżni jest proporcjonalna do $(1 - \cos \bar{\theta})$ (patrz np. [21]). Jeśli $\bar{\theta}$ jest parametrem dynamicznym, prawdziwa próżnia (o najmniejszej energii) ma $\bar{\theta} = 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Fakt ten wymaga jednak dowodu, my zaś nie chcemy wchodzić tak głęboko w szczegóły rachunku instantonowego, jako że nie wnosi to nic do jasności rozumowania. Nam wystarczy fakt, iż potencjał jest periodyczny z okresem 2π i że posiada minimum w $\bar{\theta} = 0$. Aby to pokazać, wystarczy odwołać się do prostego argumentu podanego przez Vafę i Wittena [22], który poniżej naszkicujemy.

Dyskusję wygodnie jest przeprowadzić w przestrzeni euklidesowej. Ponieważ interesuje nas struktura próżni, możemy jako nieistotny pominąć człon kinetyczny dla aksjonu. Wtedy potencjał efektywny dla pola a

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\int d^4x V_{\text{eff}}[a]\right\} &= \int \mathcal{D}A_\mu \prod_i \mathcal{D}q_i \mathcal{D}\bar{q}_i \exp\left\{-\int d^4x \left[\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \sum_i \bar{q}_i (\not{D} + m_i) q_i + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{ig^2}{32\pi^2} \frac{a}{f_a} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}\right]\right\} = \int \mathcal{D}A_\mu \prod_i \det(\not{D} + m_i) \times \\ &\quad \times \exp\left\{-\int d^4x \left[\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{ig^2}{32\pi^2} \frac{a}{f_a} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}\right]\right\}. \end{aligned} \quad (2.83)$$

³Ponieważ w następnych rozdziałach ograniczymy się jedynie do teorii zawierających mechanizm PQ, od tej chwili będziemy utożsamiać parametr $\bar{\theta}$ ze zmienną $\frac{a(x)}{f_a}$; tak więc warunek $\bar{\theta} = 0$ oznaczać będzie to samo, co $a = 0$.

Ponieważ w przestrzeni euklidesowej operator Diraka $i\mathcal{D}$ jest hermitowski oraz antykomutuje z γ^5 to jeśli λ jest jego wartością własną, wtedy również $-\lambda$ też jest wartością własną. Stąd wynika, że wyznacznik fermionowy jest rzeczywisty i dodatnio określony

$$\det(\mathcal{D} + m_i) > 0, \quad (2.84)$$

natomiast człon $iG\tilde{G}$ jest czysto urojony. Korzystając z tych dwóch faktów oraz nierówności Schwarza otrzymujemy oszacowanie:

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\int d^4x V_{\text{eff}}[a]\right\} &\leq \int \mathcal{D}A_\mu \left| \prod_i \det(\mathcal{D} + m_i) \exp\left\{-\int d^4x \left[\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{ig^2}{32\pi^2} \frac{a}{f_a} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}\right]\right\} \right| \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \prod_i \det(\mathcal{D} + m_i) \exp\left\{-\int d^4x \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}\right\} \\ &= \exp\left\{-\int d^4x V_{\text{eff}}[0]\right\}, \end{aligned} \quad (2.85)$$

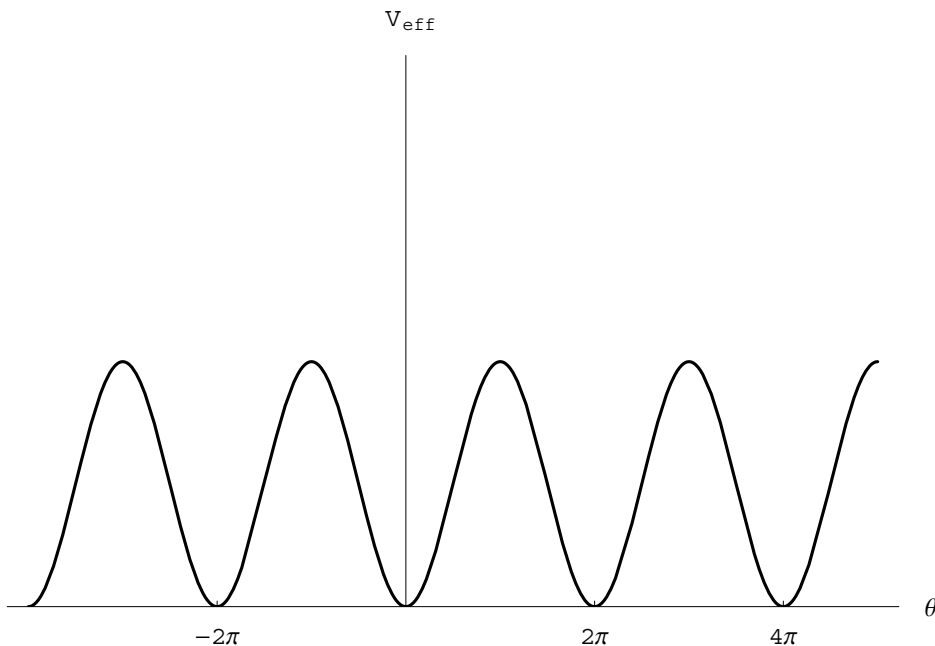
skąd

$$\int d^4x V_{\text{eff}}[0] \leq \int d^4x V_{\text{eff}}[a]. \quad (2.86)$$

Oznacza to, że jedno minimum potencjału znajduje się w $\langle a \rangle = 0$. Z periodyczności kąta $\bar{\theta}$ mamy także minima w punktach odpowiadających $\langle a \rangle = 2\pi n f_a$ gdzie $n \in \mathbb{N}$.

Q.E.D.

Kształt potencjału jest więc podobny do tego naszkicowanego na rysunku 2.2. Należy jednak podkreślić, że dokładny kształt potencjału nie został przez nas znaleziony i poniższy rysunek należy traktować jako schematyczny.



Rysunek 2.2: Schematyczny kształt potencjału dla pola aksjonu a .

Rozdział 3

Modele

Nową symetrię chiralną można na bardzo wiele sposobów dodać do Modelu Standardowego, tak by zadziałał omówiony w poprzednim rozdziale mechanizm Peccei-Quinn. Konkretnie modele muszą jednak spełniać ograniczenia wynikające z doświadczeń oraz powinny sprostać wymaganiom prostoty i naturalności stawianym przez teorię. Połączenie tych warunków powoduje znaczne ograniczenie możliwych sposobów realizacji schematu PQ. W tym rozdziale zajmiemy się przedstawieniem najważniejszych modeli, ze zwróceniem szczególnej uwagi na wymagania teoretyczne - do ograniczeń nakładanych przez eksperyment wrócimy w rozdziale 5. Zaczniemy od historycznie pierwszego modelu Peccei-Quinn-Weinberga-Wilczka, który choć wykluczony na gruncie doświadczenia, stanowi bardzo przejrzysty przykład konstrukcji modelu aksjonu. Opierając się na tym schemacie przejdziemy następnie do krótkiego przedstawienia bardziej realistycznych propozycji, czyli modeli „niewidzialnych aksjonów”, koncentrując się na wynikach dla tych modeli oraz dyskusji możliwości ich rozszerzenia.

3.1. Aksjon Peccei-Quinn-Weinberga-Wilczka

W modelu PQWW stopień swobody aksjonu zawarty jest w fazach pól Higgsa standardowej teorii elektroslabej. Jak pokazaliśmy, mechanizm PQ wymaga by pole aksjonu na poziomie klasycznym nie miało potencjału, a dopiero by aksjon sprzęgał się do gluonów poprzez człon wynikający z istnienia anomalii chiralnej. Oznacza to, że nie wystarczy jeden dublet Higgsa, gdyż w takim przypadku trzy fazy są absorbowane jako podłużne składowe bozonów W^\pm oraz Z^0 , natomiast pozostały bozon Higgsa ma potencjał na poziomie klasycznym. Stąd też potrzebujemy w modelu więcej niż jednego dubletu Higgsa (bądź innych dodatkowych pól). W modelu PQWW zakładamy istnienie dwóch dubletów Higgsa.

W tym przypadku, najogólniejszy renormalizowalny potencjał zgodny z symetrią odbicia $\phi_i \rightarrow -\phi_i$ ma postać

$$V(\phi_1, \phi_2) = -\mu_1^2 \phi_1^\dagger \phi_1 - \mu_2^2 \phi_2^\dagger \phi_2 + \sum_{i,j} a_{ij} \phi_i^\dagger \phi_i \phi_j^\dagger \phi_j + \sum_{i,j} b_{ij} \phi_i^\dagger \tilde{\phi}_j \tilde{\phi}_j^\dagger \phi_i + \sum_{i \neq j} (c_{ij} \phi_i^\dagger \tilde{\phi}_j \phi_i^\dagger \tilde{\phi}_j + \text{h.c.}), \quad (3.1)$$

gdzie hiperładunki pól ϕ_1 i ϕ_2 wynoszą odpowiednio $\frac{1}{2}$ oraz $-\frac{1}{2}$, macierze a_{ij} oraz b_{ij} są rzeczywiste i symetryczne, c_{ij} jest hermitowska, zaś $\tilde{\phi}_i = i\sigma_2 \phi_i^*$. Widać, że ten najogólniejszy potencjał nie posiada poszukiwanej symetrii $U(1)$, a jedynie symetrię cechowania z Modelu Standardowego $U_Y(1)$. By tę symetrię otrzymać, Peccei i Quinn narzucili warunek znikania ostatniego członu, czyli $c_{ij} = 0$. W takim przypadku istnieje dodatkowa symetria $U_{PQ}(1)$:

$$\phi_1 \rightarrow e^{i\alpha\Gamma_1} \phi_1 \quad \phi_2 \rightarrow e^{i\alpha\Gamma_2} \phi_2, \quad (3.2)$$

gdzie Γ_i są ładunkami PQ pól ϕ_i . Następnie musimy napisać sprzężenia Yukawy do kwarków w ten sposób, aby nie zepsuć globalnej symetrii PQ (3.2) (oraz oczywiście pozostałych symetrii MS)

$$\mathcal{L}_Y^q = \sum_{i,j} (-Y_{ij}^{(u)*} \bar{q}_{Lj} \phi_2 u_{Ri} - Y_{ij}^{(u)} \phi_2^\dagger \bar{u}_{Ri} q_{Lj} - Y_{ij}^{(d)*} \bar{q}_{Lj} \phi_1 d_{Ri} - Y_{ij}^{(d)} \phi_1^\dagger \bar{d}_{Ri} q_{Lj}), \quad (3.3)$$

gdzie i, j są wysumowane po zapachach, $q^T = (u, d)$, natomiast kwarki mają następujące własności transformacyjne pod działaniem symetrii PQ:

$$u_L \rightarrow e^{\frac{i}{2}\alpha\Gamma_2} u_L, \quad u_R \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\alpha\Gamma_2} u_R, \quad d_L \rightarrow e^{\frac{i}{2}\alpha\Gamma_1} d_L, \quad d_R \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\alpha\Gamma_1} d_R. \quad (3.4)$$

Sprzężenia Yukawy do leptonów mogą być zrealizowane na różne sposoby. Oczywiście muszą zachowywać symetrię PQ, gdyż inaczej aksjon otrzymałby człon potencjału. Nie jest to jednak warunek ustalający te sprzężenia jednoznacznie. W szczególności do prawego singletu leptonowego można sprząć ϕ_1 , ϕ_2 lub też wprowadzić trzecie pole Higgasa. Te trzy różne modele dają trochę różne przewidywania ilościowe, jednak idea jest dla wszystkich taka sama, zaś różnice ilościowe nie powodują istotnych zmian w obliczu niezgodności modelu PQWW z danymi eksperymentalnymi. Ograniczymy się więc jedynie do przypadku pierwszego, dla którego

$$\mathcal{L}_Y^l = \sum_{i,j} (-Y_{ij}^{(l)} \bar{l}_{Lj} \phi_1 e_{Ri} - Y_{ij}^{(l)*} \phi_1^\dagger \bar{e}_{Ri} l_{Lj}), \quad (3.5)$$

gdzie l_{Li} to lewy dublet leptonowy i -tej rodziny, $l_{Li}^T = (\nu_L, e_L)_i$, natomiast e_{Ri} to prawy singlet i -tej rodziny. Aby zachowana była symetria PQ musimy nadać leptonom następujące ładunki:

$$l_L \rightarrow e^{\frac{i}{2}\alpha\Gamma_1} l_L, \quad e_R \rightarrow e^{-\frac{i}{2}\alpha\Gamma_1} e_R. \quad (3.6)$$

Nadajmy teraz fizyczne znaczenie fazom dubletów Higgasa, w szczególności, określmy ich kombinację odpowiadającą polu aksjonu. Ponieważ aksjon jest bozonem Goldstone'a spontanicznie złamanej symetrii $U_{PQ}(1)$ to pod wpływem działania tej symetrii mamy

$$a \rightarrow a + \lambda, \quad \text{gdzie} \quad \lambda = \text{const.} \quad (3.7)$$

Rozwińmy zerowe składowe dubletów Higgasa wokół ich próżniowych wartości oczekiwanych $\langle \phi_1^0 \rangle = v_1/\sqrt{2}$ oraz $\langle \phi_2^0 \rangle = v_2/\sqrt{2}$ jako

$$\phi_1^0 = \frac{v_1 + \rho_1}{\sqrt{2}} \exp(iP_1/v_1) \quad \phi_2^0 = \frac{v_2 + \rho_2}{\sqrt{2}} \exp(iP_2/v_2), \quad (3.8)$$

gdzie ρ_i są rzeczywitymi polami Higgasa. Jedna kombinacja h faz P_i jest absorbowana przez bozon Z , druga natomiast tworzy aksjon a . Zapiszmy ogólnie

$$\begin{aligned} h &:= -P_1 \sin \theta + P_2 \cos \theta, \\ a &:= P_1 \cos \theta + P_2 \sin \theta \end{aligned} \quad (3.9)$$

lub odwracając

$$\begin{aligned} P_1 &= a \cos \theta - h \sin \theta, \\ P_2 &= a \sin \theta + h \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pod wpływem działania symetrii PQ mamy (3.7), czyli

$$\begin{aligned} P_1 &\rightarrow (a + \lambda) \cos \theta - h \sin \theta, \\ P_2 &\rightarrow (a + \lambda) \sin \theta + h \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.11)$$

czyli

$$\begin{aligned} P_1 &\rightarrow P_1 + \lambda \cos \theta, \\ P_2 &\rightarrow P_2 + \lambda \sin \theta, \end{aligned} \quad (3.12)$$

skąd otrzymujemy warunki

$$\alpha\Gamma_1 = \frac{\cos \theta}{v_1} \lambda, \quad \alpha\Gamma_2 = \frac{\sin \theta}{v_2} \lambda \quad (3.13)$$

oraz identyfikujemy aksjon jako

$$a = \frac{v_1\Gamma_1 P_1 + v_2\Gamma_2 P_2}{\sqrt{v_1^2\Gamma_1^2 + v_2^2\Gamma_2^2}}. \quad (3.14)$$

Analogicznie warunek, mówiący że bozon h jest absorbowany przez Z, ustala relatywną wartość ładunków Γ_1 i Γ_2 . Łatwo pokazać, że

$$h = \frac{-v_1 P_1 + v_2 P_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \quad (3.15)$$

skąd mamy

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{v_2^2}{v_1^2} \equiv x^2 \quad (3.16)$$

oraz

$$a = \frac{v_2 P_1 + v_1 P_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}. \quad (3.17)$$

Rozpisując lagranżjan Yukawy i identyfikując w nim powyższe pole aksjonu można łatwo odczytać sprzężenia aksjon-kwarki oraz aksjon-leptony (patrz np. [19]). Poniżej przedstawimy metodę otrzymania masy aksjonu korzystając z lagranżjanu efektywnego opisującego fizykę poniżej skali Λ_{QCD} , skąd też dodatkowo otrzymamy sprzężenia do mezonów. Następnie zajmiemy się zbadaniem wynikającego z anomalii chiralnej sprzężenia do fotonów. Te dwa parametry modeli aksjonowych, masę i sprzężenie do fotonów, omówimy dokładniej, gdyż są one fenomenologicznie najistotniejsze.

3.1.1. Masa aksjonu

Aksjon otrzymuje masę na skutek potencjału generowanego przez efekty instantonowe. Niestety nie ma wiarygodnej metody wyznaczenia dokładnej postaci tegoż potencjału, ani obliczenia jego wkładów do diagramów masowych dla aksjonu. Można jednak przeprowadzić oszacowanie opierając się na obserwacji, iż sprzężenie aksjonu do kwarków jest pseudoskalarne i wykorzystując algebrę prądów. Rachunki przeprowadzone przez Bardeena i Tye'a [23] oraz niezależnie Kandasawamy'ego et al. [24] dały wynik

$$m_a = N_g \left(\frac{1}{x} + x \right) \frac{\sqrt{m_u m_d} f_\pi m_\pi}{m_u + m_d v}, \quad (3.18)$$

gdzie N_g - liczba generacji, $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Dla $N_g = 3$, $\frac{m_u}{m_d} = 0,56$ oraz $v = 247$ GeV będącego skalą łamania symetrii elektrosłabej otrzymamy

$$m_a = 73,6(1/x + x) \text{ keV}. \quad (3.19)$$

Poniżej odtworzymy ten wynik korzystając z niskoenergetycznego lagranżjanu efektywnego opisującego fizykę pionów.

Piony są to bozony pseudogoldstonowskie wynikające z naruszenia przybliżonej symetrii chiralnej $SU_L(2) \times SU_R(2)$ Modelu Standardowego. Względem niezłamanej symetrii $SU_V(2)$ mamy tryplet pionów wraz z singletowym polem mezonu η . Wiadomo, że masa η jest o wiele większa od masy pionów (w przybliżeniu równych) $m_\eta \gg m_\pi$. Spodziewamy się więc, że na skalach energii $E \ll m_\eta$ piony będą efektywnie odprzęgnięte od η . Czyli chcemy stworzyć lagranżjan efektywny, niezmienniczy względem symetrii $SU(2) \times SU(2)$ (jako że oddziaływania silne mezonów π i η są $SU(2) \times SU(2)$ niezmiennicze) oraz by symetria ta realizowała się w sposób nie mieszający pól π i η . W tym celu zdefiniujemy operator unitarny

$$U = \exp\left(i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} + \eta}{f_\pi}\right), \quad (3.20)$$

gdzie $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Wtedy część chiralna lagranżjanu wraz z członem kinetycznym dla aksjonu ma postać

$$\mathcal{L}_{chiral} = \frac{1}{4} f_\pi^2 \text{Tr} \{ \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U \} + \frac{1}{2} \partial_\mu a \partial^\mu a. \quad (3.21)$$

Widać, że lagranżjan ten jest niezmienniczy względem transformacji $SU(2) \times SU(2)$ danej przez

$$U \rightarrow g_L U g_R^\dagger \quad (3.22)$$

oraz względem globalnej translacji pola aksjonu

$$a \rightarrow a + \xi f_a. \quad (3.23)$$

Oczywistym jest również, że symetrie te nie mieszają pól pionów i bozonu η , więc lagranżjan ten ma wszystkie własności jakich oczekivalibyśmy od lagranżjanu efektywnego opisującego tę skalę energii. Dodając oddziaływania elektrosłabe należy zamienić pochodne cząstkowe na pochodne kowariantne zdefiniowane w następujący sposób

$$D_\mu U = \partial_\mu U + i \frac{1}{2} g \vec{\sigma} \cdot \vec{W}_\mu U + i \frac{1}{6} g' Y_\mu U + i g' Y_\mu U \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Wtedy część chiralna lagranżjanu wygląda następująco:

$$\mathcal{L}_{chiral+WI} = \frac{1}{4} f_\pi^2 \text{Tr} \{ (D_\mu U)^\dagger (D^\mu U) \} + \frac{1}{2} \partial_\mu a \partial^\mu a. \quad (3.25)$$

Wiemy jednak, że symetria $SU_L(2) \times SU_R(2)$ w Modelu Standardowym jest przybliżona, mianowicie łamią ją niezerowe masy kwarków u i d . Musimy zatem w lagranżjanie efektywnym uwzględnić człon *explicite* łamiący symetrię chiralną i to w ten sam sposób, co człon łamiący ją w MS. Człon zawierający masy kwarków transformuje się pod wpływem $SU(3) \times SU(3)$ jak $(3, \bar{3}) \oplus (\bar{3}, 3)$, więc z U musimy skonstruować człon transformujący się w ten sam sposób. Ponieważ składowe U transformują się jak $(3, \bar{3})$, to w najniższym rzędzie poszukiwana poprawka to

$$\mathcal{L}_{mass} = \frac{1}{2} v \text{Tr} \{ U A M + M^\dagger A^\dagger U^\dagger \}, \quad (3.26)$$

gdzie M jest macierzą mas lekkich kwarków

$$M = \begin{bmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

natomiast A zawiera zespolone fazy pochodzące od aksjonu

$$A = \begin{bmatrix} e^{-iax/f_a} & 0 \\ 0 & e^{-ia/x f_a} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Parametr v jest związany ze skalą łamania symetrii PQ i zostanie wyznaczony z mas pionu, kwarków oraz stałej rozpadu pionu. Widać, że (3.26) jest niezmienniczy ze względu na transformację PQ gdy pod jej wpływem

$$U \rightarrow U \cdot \begin{bmatrix} e^{-iz\xi} & 0 \\ 0 & e^{-i\xi/x} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Na koniec trzeba uwzględnić jeszcze jeden człon, mianowicie opisujący wkłady od anomalii na poziomie kwarkowym. Zauważmy wpierw, że w lagranżjanie uwzględniliśmy już oddziaływania aksjonu z lekkimi kwarkami w członie \mathcal{L}_{mass} , dlatego wkład do lagranżjanu efektywnego od anomalii będzie jedynie od ciężkich kwarków oraz anomalii pól mezonowych. Prąd Noether związany z symetrią PQ jest postaci

$$J_\mu^{PQ} = v\partial_\mu a - \frac{1}{2x} \sum_i \bar{u}_i \gamma_\mu \gamma_5 u_i - \frac{x}{2} \sum_i \bar{d}_i \gamma_\mu \gamma_5 d_i + (\text{prądy leptonowe}), \quad (3.30)$$

gdzie sumujemy jedynie po ciężkich kwarkach. Wkład od prądów leptonowych jest do zaniebdania, tak więc anomalny człon w lagranżjanie od anomalii symetrii PQ ma postać

$$\mathcal{L}_{anomaly}(a) = \frac{a}{f_a} N_H \left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{\alpha_s}{8\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}, \quad (3.31)$$

gdzie N_H jest liczbą rodzin ciężkich kwarków, natomiast $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$ stałą sprzężenia oddziaływań silnych. W podobny sposób można określić anomalię związaną z $U_A(1)$, co daje człon

$$\mathcal{L}_{anomaly}(\eta) = \eta \frac{f_\pi}{2} \frac{\alpha_s}{8\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}. \quad (3.32)$$

Powyższe dwa człony należy teraz przetłumaczyć na wkład do lagranżjanu efektywnego. Potencjał pochodzący od członu $G\tilde{G}$ jest ze względu na efekty instantonowe proporcjonalny (w przybliżeniu) do $(1 - \cos x)$, gdzie x oznacza tutaj pole aksjonu a bądź mezonu η . Minimum tego potencjału występuje w zerze, a w jego okolicy $1 - \cos x \approx x^2$, co daje człon masowy dla tychże pól. Stała proporcjonalności w podejściu efektywnym jest w przybliżeniu równa masie mezonu η . Ostatecznie więc trzeba dodać do lagranżjanu efektywnego

$$\mathcal{L}_{anomaly} = -\frac{1}{2} m_\eta^2 \left[\eta + \frac{1}{2} \frac{f_\pi}{f_a} N_H \left(x + \frac{1}{x}\right) a \right]^2. \quad (3.33)$$

Pełen lagranżjan efektywny:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} = & \frac{1}{4} f_\pi^2 \text{Tr} \{ (D_\mu U)^\dagger (D^\mu U) \} + \frac{1}{2} \partial_\mu a \partial^\mu a + \\ & + \frac{1}{2} v \text{Tr} \{ U A M + M^\dagger A^\dagger U^\dagger \} + -\frac{1}{2} m_\eta^2 \left[\eta + \frac{1}{2} \frac{f_\pi}{f_a} N_H \left(x + \frac{1}{x}\right) a \right]^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Rozwijając część masową powyższego lagranżjanu (3.26) do drugiego rzędu w polach mezonowych i aksjonu, a następnie dodając człon wynikający z anomalii, otrzymamy masy i parametry mieszania mezonów π i η oraz aksjonu. W sektorze naładowanych pionów

$$\mathcal{L}_{charged} = -f_\pi^{-2}(m_u + m_d)v\pi^+\pi^-, \quad (3.35)$$

skąd porównując z członem masowym dla pionów odczytujemy

$$v = \frac{(f_\pi m_\pi)^2}{m_u + m_d}. \quad (3.36)$$

W sektorze neutralnym natomiast

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{neutral} = & -\frac{1}{2}m_\pi^2(m_u/(m_u + m_d))[\pi^0 + \eta - a(xf_\pi/f_a)]^2 \\ & -\frac{1}{2}m_\pi^2(m_d/(m_u + m_d))[-\pi^0 + \eta - a(f_\pi/x f_a)]^2 \\ & -\frac{1}{2}m_\eta^2[\eta + (f_\pi/2f_a)\{N_H(x + 1/x)\}a]^2. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Diagonalizacja pozwala odczytać dla modelu PQWW masę aksjonu

$$m_a = m_\pi(f_\pi/f_a)N_g(x + 1/x)(\sqrt{m_u m_d}/(m_u + m_d)) \quad (3.38)$$

jak i parametry mieszania aksjonu z pionem i aksjonu z etą

$$\begin{aligned} \xi_{\pi a} &= \lambda_3(f_\pi/f_a)[1 + m_a^2/m_\pi^2], \\ \xi_{\eta a} &= \lambda_s(f_\pi/f_a), \end{aligned} \quad (3.39)$$

gdzie N_g jest całkowitą liczbą rodzin ($N_g = N_H + 1$) oraz λ_3 i λ_s dane są przez

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{1}{2}\{(x - 1/x) - N_g(x + 1/x)[(m_d - m_u)/(m_d + m_u)]\}, \\ \lambda_s &= -\frac{1}{2}N_H(x + 1/x). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Otrzymane wyniki pokrywają się z tymi uzyskanymi za pomocą algebry prądów, jedyna różnica występuje w parametrze mieszania aksjonu z pionem, jednak jest to mała poprawka rzędu m_a^2/m_π^2 .

3.1.2. Sprzężenie aksjonu do fotonów

Aksjon sprzęga się do fotonów poprzez człon istniejący na skutek elektromagnetycznej anomalii prądu PQ

$$\partial_\mu J_{PQ}^\mu = \frac{\alpha}{4\pi}\bar{c}_{a\gamma\gamma}F_{\mu\nu}^{em}\tilde{F}_{em}^{\mu\nu}. \quad (3.41)$$

Współczynnik anomalii $\bar{c}_{a\gamma\gamma}$ związany jest z ładunkami fermionów - elektrycznymi oraz PQ. W rozdziale 2.1 wyprowadziliśmy ogólny wzór na funkcję anomalii w przypadku jednej generacji fermionów. Można łatwo rozszerzyć tę dyskusję na przypadek wielu generacji, gdy poszczególne fermiony transformują się pod działaniem symetrii chiralnej z różnymi ładunkami. Taka sytuacja występuje w przypadku symetrii $U_{PQ}(1)$, gdzie fermionom przypisujemy różne ładunki PQ. Dla anomalii elektromagnetycznej mamy

$$\mathcal{A}(x) = \frac{\alpha}{4\pi}F_{\mu\nu}^{em}\tilde{F}_{em}^{\mu\nu}\text{Tr}\{(Q_{em})^2Q_{PQ}\}, \quad (3.42)$$

gdzie Q_{em} jest macierzą ładunków elektrycznych fermionów, natomiast Q_{PQ} macierzą ładunków PQ. Daje to wzór na współczynnik anomalii

$$\bar{c}_{a\gamma\gamma} = \text{Tr} \{ (Q_{em})^2 Q_{PQ} \} = \sum_i (Q_i^{em})^2 Q_{PQ}^i, \quad (3.43)$$

gdzie sumujemy po wszystkich fermionach. W modelu PQWW współczynnik ten otrzymuje wkład zarówno od kwarków jak i leptonów

$$\bar{c}_{a\gamma\gamma} = N_g \{ [3(2/3)^2]x + [3(-1/3)^2 + (-1)^2]1/x \} = \frac{4}{3} N_g (x + 1/x). \quad (3.44)$$

Zapisując lagranżjan oddziaływania aksjonu z fotonami w postaci

$$\mathcal{L}_{a\gamma\gamma} = \frac{\alpha}{4\pi} c_{a\gamma\gamma} \frac{a}{f_a} F_{\mu\nu}^{em} \tilde{F}_{em}^{\mu\nu}, \quad (3.45)$$

mamy na skutek transformacji chiralnej kasującej człon \mathcal{L}_θ z lagranżjanu QCD efektywny parametr sprzężenia $c_{a\gamma\gamma}$ dany wzorem

$$c_{a\gamma\gamma} = \bar{c}_{a\gamma\gamma} - 6 \sum_i \alpha_i Q_{em}^2(q_i), \quad (3.46)$$

gdzie sumujemy po kwarkach. Parametry transformacji α_i spełniają dwa warunki, mianowicie muszą zachowywać niezmienniczość względem grupy zapachu oraz ich suma musi być ustalona aby kasować parametr $\bar{\theta}$

$$\alpha_u m_u = \alpha_d m_d = \alpha_s m_s = \dots \quad (3.47)$$

Ponieważ $m_s \gg m_u, m_d$ to otrzymujemy

$$c_{a\gamma\gamma} = \bar{c}_{a\gamma\gamma} - 6 \left(\frac{4}{9} \frac{m_d}{m_u + m_d} + \frac{1}{9} \frac{m_u}{m_u + m_d} \right) \approx \bar{c}_{a\gamma\gamma} - 1,92. \quad (3.48)$$

3.2. „Niewidzialne aksjony”

Głównym problemem modelu PQWW z punktu widzenia fenomenologicznego jest jego powiązanie ze skalą łamania symetrii elektroslabej. Choć wydawało się to na początku naturalnym założeniem, szybko przekonano się o niezgodności tego typu modelu z danymi doświadczalnymi. Aby oddzielić skalę łamania symetrii PQ od skali elektroslabej, należy skonstruować model, w którym aksjon nie będzie zawarty w fazach pola Higgsa transformującego się nietrywialnie względem $SU(2) \times U(1)$, lecz w fazie pola skalarnego będącego singletem względem działania tej grupy. Wtedy możliwe jest by próżniowa wartość oczekiwana tego pola była dużo większa od 247 GeV.

Następnym punktem w konstruowaniu modelu „niewidzialnego aksjonu” jest realizacja potencjału dla aksjonu poprzez anomalie. W tym celu musimy mieć jakieś kwarki niosące ładunki PQ. Jedną z dróg jest wprowadzenie nowego bardzo ciężkiego kwarku Q (model KSVZ [5]), inną założenie istnienia dodatkowego dubletu (bądź dubletów) Higgsa, tak że zarówno lekkie kwarki jak i dublety Higgsa niosą niezerowe ładunki PQ (model DFSZ [6]).

Rozważmy pole skalarnie σ będące singletem względem $SU(2) \times U(1)$ niosące niezerowy ładunek PQ. Pod wpływem transformacji względem $U_{PQ}(1)$ mamy

$$a \rightarrow a + f_a \alpha \quad \sigma \rightarrow e^{iQ\sigma\alpha} \sigma, \quad (3.49)$$

gdzie Q_σ jest ładunkiem PQ pola σ . Spontaniczne łamanie symetrii PQ otrzymujemy przez niezerową wartość próżniową $\langle \sigma \rangle = v/\sqrt{2}$. Następnie rozwijamy wokół wartości próżniowej i identyfikujemy pole aksjonu jako fazę singletu σ

$$\sigma = \frac{v + \rho}{\sqrt{2}} \exp(ia/v). \quad (3.50)$$

Warto zauważyć, że z powyższych równań wynika, iż stała rozpadu f_a nie jest dokładnie tym samym co v , lecz

$$f_a = Q_\sigma v. \quad (3.51)$$

3.2.1. KSVZ

W tym modelu jedynymi polami obdarzonymi ładunkiem PQ są pole skalarnie σ i pole ciężkiego kwarku Q . Oczywiście Q nie może mieć członu masowego, gdyż łamana byłaby symetria PQ. Dla prostoty założmy, że Q jest trypletem względem grupy kolorowej $SU_c(3)$ ¹. Istotne sprzężenia Yukawy zgodne z symetrią PQ (3.49) oraz

$$Q_L \rightarrow \exp\left(\frac{i}{2}Q_\sigma\alpha\right)Q_L \quad Q_R \rightarrow \exp\left(-\frac{i}{2}Q_\sigma\alpha\right)Q_R \quad (3.52)$$

mają postać

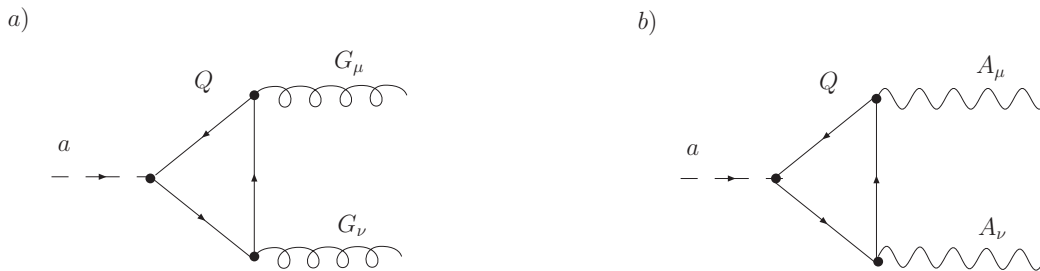
$$\mathcal{L}_Y = -Y\bar{Q}_L\sigma Q_R - Y^*\bar{Q}_R\sigma^* Q_L. \quad (3.53)$$

Podczas gdy potencjał dla dubletu Higgsa ϕ i pola σ

$$V[\phi, \sigma] = -\mu_\phi^2\phi^\dagger\phi - \mu_\sigma^2\sigma^*\sigma + \lambda_\phi(\phi^\dagger\phi)^2 + \lambda_\sigma(\sigma^*\sigma)^2 + \lambda_{\phi\sigma}\phi^\dagger\phi\sigma^*\sigma. \quad (3.54)$$

Mimo braku członu masowego, kwark Q może być bardzo ciężki (i tym samym „niewidzialny”), gdyż nabiera masę poprzez próżniową wartość oczekiwaną pola σ .

Na poziomie drzewowym aksjon KSVZ sprzęga się jedynie do ciężkiego kwarku Q . Ponieważ kwark ten jest singletem grupy $SU(2)$, lecz może posiadać niezerowy hiperładunek (czyli tym samym ładunek elektryczny), to sprzęga się on dalej jedynie do gluonów i fotonów. Oznacza to, że aksjon sprzęga się do gluonów przez diagram trójkątny. Jednopętlowo może sprzęgać się też do fotonów, o ile ładunek elektryczny kwarku Q jest różny od zera $e_Q \neq 0$. Oba te diagramy zostały przedstawione na rysunku 3.1.



Rysunek 3.1: Diagramy Feynmana sprzężenia a) aksjonu do gluonów, b) aksjonu do fotonów (o ile $e_Q \neq 0$).

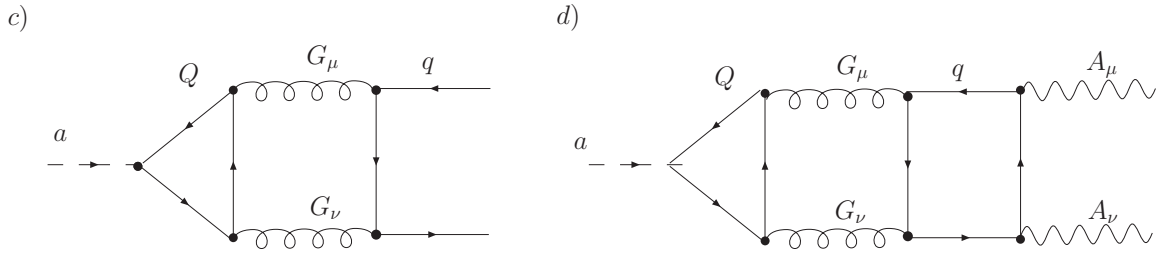
Z przedstawionych diagramów widać, że efektywne sprzężenia do gluonów i do fotonów są rzędu

$$g_{agg} \sim \frac{g_s^2}{4\pi^2 f_a}, \quad g_{a\gamma\gamma} \sim e_Q^2 \frac{e^2}{4\pi^2 f_a}. \quad (3.55)$$

¹Ważne jest by transformował się nietrywialnie względem grupy kolorowej, gdyż inaczej nie sprzęgałby się bezpośrednio do gluonów i nie rozwiązywałby tym samym problemu łamania CP w oddziaływaniach silnych.

Warto zauważyć, że w tym przypadku zarówno sprzężenie do gluonów (a w efekcie także masa aksjonu) jak i fotonów można istotnie zmieniać jedynie poprzez dobranie odpowiedniej skali f_a oraz że oba te sprzężenia są ze sobą bardzo mocno powiązane. Daje to małe pole do manewru przy próbach jakichkolwiek zmian w tym modelu (niestety przy modelu DFSZ sytuacja jest jeszcze trudniejsza), gdyż w takim wypadku skala łamania symetrii PQ musi spełniać dość restrykcyjne ograniczenia wynikające nie tylko z kosmologii i oddziaływań z nukleonami (od sprzężenia do gluonów), ale również oddziaływań z fotonami (ograniczenia laboratoryjne i astrofizyczne).

Trochę inną sytuację mamy, gdy przyjmiemy, że kwark Q nie transformuje się pod wpływem grupy $U_Y(1)$. Wtedy jego ładunek elektryczny będzie się równał zeru i sprzężenie do fotonów będzie sprzężeniem dopiero trójpętlowym! Bowiemy wtedy ciężki kwark sprzęga się jedynie do gluonów, które z kolei sprzęgają się do lekkich kwarków, a te do fotonów. Przy okazji widzimy, że sprzężenie do kwarków będzie dwupętłowe, natomiast do leptonów jeszcze przez kolejne pętle i w efekcie okaże się być zanedbywalnie małe. Diagramy dla sprzężeń aksjonu do kwarków i trójpętłowe sprzężenie do fotonów przedstawione są na rysunku 3.2.



Rysunek 3.2: Diagramy Feynmana sprzężenia c) aksjonu do lekkich kwarków, d) aksjonu do fotonów (dominujący dla przypadku, gdy $e_Q = 0$).

Choć policzenie tych diagramów jest bardzo skomplikowane, to można dokonać oszacowania, dającego następujące efektywne sprzężenia do lekkich kwarków i fotonów

$$g_{aqq} \sim \left(\frac{g_s^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_i \frac{m_q^i}{f_a} \log\left(\frac{m_Q}{m_q^i}\right), \quad g_{a\gamma\gamma} \sim \frac{e^2}{4\pi^2} \left(\frac{g_s^2}{4\pi^2}\right)^2 \sum_i \frac{m_q^i}{f_a} (e_Q^i)^2 \log\left(\frac{m_Q}{m_q^i}\right), \quad (3.56)$$

gdzie sumujemy po wszystkich kwarkach.

W takiej sytuacji nieco rozdzielamy sprzężenia do gluonów i fotonów, osłabiając te drugie przez dodatkowe pętle. Powoduje to, że aksjon KSVZ staje się jeszcze trudniejszy do wykrycia i pozwala trochę obniżyć ograniczenia na sprzężenie $g_{a\gamma\gamma}$ wynikające z obserwacji astrofizycznych i eksperymentów laboratoryjnych, bez wchodzenia w konflikt z ograniczeniami kosmologicznymi.

Co więcej, nie bardzo widać sposób, w jaki można by było tak zmodyfikować powyższy model, aby sprzężenie do gluonów odbywało się poprzez większą liczbę pętli, co pozwoliłoby zupełnie oddzielić te dwa efekty (sprzężenie do fotonów można otrzymać również przez czteropętłowy diagram niezawierający gluonów). Problem jednak w tym, że wszystkie możliwe modyfikacje tego typu prowadziłyby do sprzężeń do gluonów, które nie byłyby chiralne i tym samym nie dawałyby wkładu do sprzężenia do $G\tilde{G}$.

Trudno natomiast wykonać inną modyfikację modelu KSVZ bez podważania istniejących wyników doświadczalnych. Jak zauważyliśmy, prócz swobody wyboru hiperładunku, mamy tylko możliwość zmiany skali f_a . Jeśli weźmiemy ją zbyt małą, to nawet przy $e_Q = 0$ aksjon będzie zbyt silnie oddziaływał z nukleonami (poprzez sprzężenie z lekkimi kwarkami), jeśli

zaś zbyt dużą, to będzie zbyt lekki i spowoduje domknięcie się Wszechświata. Do dokładniejszego omówienia ograniczeń wrócimy w rozdziale 5 poświęconym fenomenologii, tutaj jedynie chcielibyśmy zasygnalizować małą elastyczność istniejących modeli (to samo bowiem dotyczy modelu DFSZ).

Przejdźmy teraz do przedstawienia wyników obliczenia masy aksjonu i jego sprzężenia do fotonów z podejścia efektywnego opisanego w podrozdziale 3.1. Z konstrukcji modelu widać, że aksjon KSVZ nie sprzęga się do lekkich kwarków, stąd też człon masowy lagranżjanu efektywnego (3.26) będzie miał prostszą postać, gdyż nie będzie zawierał pola aksjonu i po rozwinięciu da (analogicznie do (3.37))

$$\mathcal{L}_{mass} = -\frac{1}{2} \frac{m_\pi^2}{m_u + m_d} [m_u(\pi^0 + \eta)^2 + m_d(\eta - \pi^0)^2]. \quad (3.57)$$

Należy jeszcze wyznaczyć wkład do lagranżjanu efektywnego od członów anomalnych w tym modelu. Prąd PQ dla normalizacji $Q_\sigma = 1$ wygląda następująco

$$J_{PQ}^\mu = v\partial^\mu a - \frac{1}{2} \bar{Q} \gamma^\mu \gamma^5 Q, \quad (3.58)$$

czyli część anomalna prądu PQ oraz $U_A(1)$ daje wkład

$$\mathcal{L}_{anomaly} = \left(\frac{a}{f_a} + \eta \frac{2}{f_\pi} \right) \frac{g^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}. \quad (3.59)$$

W efekcie lagranżjan efektywny ma postać

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \frac{m_\pi^2}{m_u + m_d} [m_u(\pi^0 + \eta)^2 + m_d(\eta - \pi^0)^2] - \frac{1}{2} m_\eta^2 \left[\eta + \frac{1}{2} \frac{f_\pi}{f_a} a \right]^2. \quad (3.60)$$

Diagonalizując znajdujemy masę aksjonu KSVZ i parametry mieszania otrzymujemy

$$m_a = m_\pi \frac{\sqrt{m_u m_d}}{m_u + m_d} \frac{f_\pi}{f_a}, \quad (3.61)$$

$$\xi_{a\pi} = \frac{m_u - m_d}{2(m_u + m_d)} \frac{f_\pi}{f_a}, \quad (3.62)$$

$$\xi_{a\eta} = -\frac{1}{2} \frac{f_\pi}{f_a}. \quad (3.63)$$

Sprężenie do fotonów można otrzymać licząc powyższe diagramy, bądź w podejściu efektywnym uwzględniając wkłady od anomalii prądu PQ ($3e_Q^2$) oraz mieszania z π^0 i η , co daje w wyniku

$$c_{a\gamma\gamma} = 3e_Q^2 - \frac{4m_d + m_u}{3(m_u + m_d)}. \quad (3.64)$$

3.2.2. DFSZ

Przedstawimy jeszcze pokrótce model DFSZ. W tym modelu sprzężenie $aG\tilde{G}$ jest zrealizowane poprzez drzewowe oddziaływanie z lekkimi kwarkami. Ponieważ σ jest singletem $SU(2) \times U(1)$, jego bezpośrednie sprzężenie do lekkich kwarków nie jest możliwe. Można jednak wprowadzić dodatkowy dublet Higgosa ϕ_2 i sprzężać go zarówno z lekkimi kwarkami jak i polem σ , co wymaga nadania ładunków PQ zarówno dodatkowemu dubletowi ϕ_2 jak i kwarkom. Widać,

że model DFSZ jest prostym rozszerzeniem modelu PQWW. Sprzężenia Yukawy do kwarków wyglądają tak samo w obu modelach:

$$\mathcal{L}_Y^q = \sum_{i,j} (-Y_{ij}^{(u)*} \bar{q}_{Lj} \phi_2 u_{Ri} - Y_{ij}^{(u)} \phi_2^\dagger \bar{u}_{Ri} q_{Lj} - Y_{ij}^{(d)*} \bar{q}_{Lj} \phi_1 d_{Ri} - Y_{ij}^{(d)} \phi_1^\dagger \bar{d}_{Ri} q_{Lj}), \quad (3.65)$$

natomiast potencjał wygląda następująco

$$\begin{aligned} V[\phi_1, \phi_2, \sigma] = & \lambda_1(\phi_1^\dagger \phi_1 - v_1^2/2)^2 + \lambda_2(\phi_2^\dagger \phi_2 - v_2^2/2)^2 + \lambda(\sigma^* \sigma - v^2/2)^2 \\ & + (a\phi_1^\dagger \phi_1 + b\phi_2^\dagger \phi_2) \sigma^* \sigma + c(\phi_1^T \phi_2 \sigma^2 + \text{h.c.}) \\ & + d\phi_2^\dagger \phi_1^* \phi_1^T \phi_2 + e\phi_2^\dagger \tilde{\phi}_1^T \tilde{\phi}_1^* \phi_2. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Kluczową rolę w powyższym potencjale odgrywa człon $c\phi_1^T \phi_2 \sigma^2$, dzięki któremu pole ϕ_2 nabiera ładunku PQ.

Transformacja PQ zgodna z (3.49) dana jest przez

$$\begin{aligned} \phi_1 &\rightarrow \exp(-i\beta Q_\sigma) \phi_1 & \phi_2 &\rightarrow \exp(-i\gamma Q_\sigma) \phi_2, \\ u_R^i &\rightarrow \exp(i\gamma Q_\sigma) u_R^i & d_R^i &\rightarrow \exp(i\beta Q_\sigma) d_R^i, \end{aligned} \quad (3.67)$$

gdzie musi być spełniony warunek

$$\beta + \gamma = 2\alpha. \quad (3.68)$$

Elastyczność tego modelu jest jeszcze mniejsza niż w przypadku KSVZ, gdyż już na poziomie drzewowym występuje oddziaływanie aksjonu z lekkimi kwarkami. Oznacza to, że sprzężenia do gluonów i fotonów siłą rzeczy będą bardzo silnie ze sobą związane. Toteż ograniczenia wypływające między innymi z obserwacji astrofizycznych można przetłumaczyć bezpośrednio na warunki na stałą f_a . Istotną wadą tego modelu jest również fakt występowania w nim tzw. *problemu ścian domenowych*, do którego wrócimy w rozdziale 4 poświęconym roli aksjonu w kosmologii. Zaletą jest zaś fakt, iż model ten łatwo daje się zaimplementować w teoriach wielkiej unifikacji [6].

Rachunek na masę aksjonu korzystający z podejścia lagranżjanu efektywnego jest właściwie identyczny z tym dla modelu PQWW, z tą różnicą, że teraz suma ładunków PQ kwarków wynosi 2α , skąd dla normalizacji $\alpha = 1$ otrzymujemy wzór

$$m_a = m_\pi \frac{\sqrt{m_u m_d}}{m_u + m_d} 2N_g \frac{f_\pi}{f_a}. \quad (3.69)$$

Warto zauważyć, że wynik ten pokrywa się z wynikiem dla modelu KSVZ przy zamianie $f_a \rightarrow 2N_g f_a$. Podobnie można policzyć sprzężenie do fotonów, co da w wyniku

$$c_{a\gamma\gamma} = \frac{4}{3} - \frac{4m_d + m_u}{3(m_u + m_d)}. \quad (3.70)$$

Rozdział 4

Aksjon w kosmologii

Wszystkie realistyczne modele aksjonu przewidują, że ma on być bardzo lekki i bardzo słabo oddziałujący z pozostałymi cząstkami Modelu Standardowego. Oznacza to, że aksjon stanowi świetnego kandydata na cząstkę budującą ciemną materię. Co więcej, specyficzne mechanizmy produkcji aksjonów we wczesnym Wszechświecie zapewniają, że będzie to w dużej mierze zimna ciemna materia. Z jednej strony otwiera to nowe możliwości zarówno dla kosmologii jak i doświadczeń poszukujących istnienia aksjonów, z drugiej zaś pozwala otrzymać ograniczenia na parametry aksjonu, tak by jego ewentualne istnienie nie powodowało sprzeczności z dzisiejszą kosmologią.

W tym rozdziale omówimy różne metody produkcji aksjonów i z faktu, że ich istnienie nie może spowodować domknięcia Wszechświata otrzymamy ograniczenia na skalę łamania symetrii PQ. Zaczniemy od defektów topologicznych w kosmologii (wprowadzenie do standardowej kosmologii można znaleźć np. w [25]), po czym w rozdziale 4.2 przejdziemy do scenariuszy produkcji, a na koniec opiszemy poszukiwane ograniczenia.

4.1. Przejścia fazowe w kosmologii

W standardowym scenariuszu kosmologicznym przyjmujemy, że w odpowiednio wczesnym momencie ewolucji Wszechświata, gdy temperatura przewyższała skalę energii odpowiadającą spontanicznemu łamaniu jakiejś symetrii MS (w dalszej części rozszerzonego o symetrię PQ), symetria ta była zachowana. To założenie odzwierciedla się chociażby w obliczaniu efektywnych stopni swobody g_* , gdzie na różnych skalach energii uwzględniamy różne cząstki. Oznacza to jednak, że wraz z upływem czasu Wszechświat przechodził przez różne okresy (fazy), pomiędzy którymi występowały okresy przejściowe, w których zachodziło łamanie symetrii w teorii (przemiany fazowe).¹ Te przemiany fazowe, przy spełnieniu określonych warunków, mogły pozostawić po sobie defekty topologiczne w postaci ścian domenowych, strun kosmicznych bądź monopoli. Takie defekty są dobrze znane w fizyce materii skondensowanej, gdzie np. w przypadku ciekłych kryształów obserwuje się struny i monopole.

W przypadku łamania symetrii PQ, zachodzi przemiana fazowa w wyniku której powstają właśnie struny kosmiczne, a w niektórych modelach również ściany domenowe. Na ich rozpadzie opiera się jeden z mechanizmów produkcji aksjonów we wczesnym Wszechświecie, do którego omówienia wrócimy w podrozdziale 4.2.3. Poniżej przedstawimy ogólną charakterystykę powyższych defektów topologicznych.

¹Nazwa „przemiany fazowe” bierze się z uwagi na analogię opisu spontanicznego łamania symetrii do przemian fazowych w termodynamice.

4.1.1. Ściany domenowe

Ściany domenowe pojawiają się gdy zostaje spontanicznie złamana symetria dyskretna. Załóżmy, że teoria jest niezmiennicza ze względu na działanie grupy G , natomiast stan próżni na działanie jej podgrupy H . Spontaniczne złamanie symetrii dyskretnej matematycznie oznacza, że zerowa grupa homotopii rozmaitości tworzonej przez równoważne stany próżni $M \equiv G/H$ jest nietrywialna. Innymi słowy ściany domenowe powstaną gdy

$$\pi_0(M) \neq I.$$

Zobrazujemy to na prostym przykładzie gdy $G = \mathbb{Z}_2$, $H = I$, czyli $M = \mathbb{Z}_2$ skąd też $\pi_0(M) = \mathbb{Z}_2$. Teoria ta ma mieć dyskretną symetrię odbicia, całkowicie zlaną przez próżnię. Realizacją takiej symetrii jest teoria opisywana lagranżjanem dla rzeczywistego pola skalarnego

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{4} \lambda (\phi^2 - \sigma^2)^2. \quad (4.1)$$

Symetria odbicia $\phi \rightarrow -\phi$ jest spontanicznie złamana, gdy pole ϕ nabiera próżniowej wartości oczekiwanej $\langle \phi \rangle = +\sigma$ lub $\langle \phi \rangle = -\sigma$. Załóżmy, że w wyniku złamania tej symetrii przestrzeń podzieli się na dwa obszary, gdzie w jednym $\langle \phi \rangle = +\sigma$, natomiast w drugim $\langle \phi \rangle = -\sigma$. Ponieważ pole ϕ jest ciągle, to musi istnieć pewien obszar przejścia pomiędzy tymi dwoma regionami przestrzeni, w którym układ znajduje się w fałszywej próżni dla której $\phi = 0$. Właśnie ten obszar nazywamy ścianą domenową.

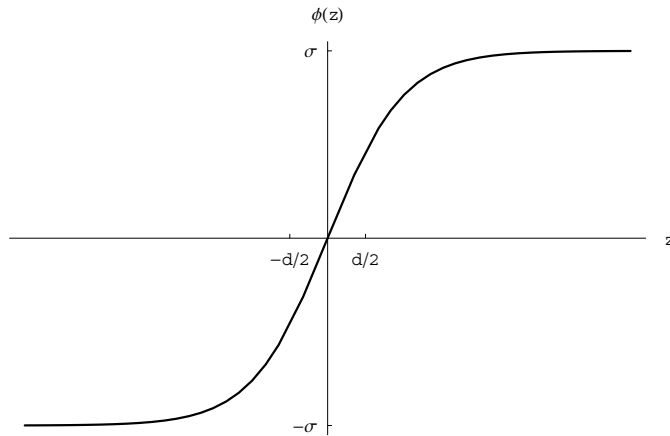
W naszym przykładzie, równanie ruchu dla statycznej nieskończonej ściany domenowej w płaszczyźnie xy o środku w $z = 0$ dane jest przez

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \lambda \phi (\phi^2 - \sigma^2) = 0. \quad (4.2)$$

Rozwiązanie spełniające warunki brzegowe, mówiące, że w plus nieskończoności pole ϕ dąży do stanu o $\langle \phi \rangle = +\sigma$, natomiast w minus nieskończoności do stanu o $\langle \phi \rangle = -\sigma$, wygląda następująco

$$\phi(z) = \sigma \operatorname{tgh}(z/d), \quad (4.3)$$

gdzie paramter d mówi o szerokości ściany domenowej i jest dany przez $d = \sigma^{-1}(\lambda/2)^{-1/2}$. Rozwiązanie to przedstawione jest na wykresie 4.1.



Rysunek 4.1: Wykres dla rozwiązania opisującego nieskończoną ścianę domenową w płaszczyźnie xy .

Powierzchniowa gęstość energii związana ze ścianą domenową jest dana jako całka z zerowej składowej tensora energii-pędu T_0^0 (otrzymanego ze wstawienia postaci (4.3) do ogólnego wyrażenia na tensor energii-pędu dla pola skalarnego), czyli

$$\eta = \int T_0^0 dz = \frac{2\sqrt{2\lambda}}{3} \sigma^3. \quad (4.4)$$

Ponieważ dokładnie tyle samo wynosi całka $\int T_i^i dz$, to napięcie powierzchniowe ściany jest równe powierzchniowej gęstości energii, zatem ściany domenowe są obiektami relatywistycznymi.

Istnienie wielkoskalowych ścian domenowych w dzisiejszym Wszechświecie jest wykluczone z powodu ich wkładu do gęstości energii. Ściana o rozmiarze rzędu H_0^{-1} miałaby masę rzędu ηH_0^{-2} , czyli około $10^{10} \sqrt{\lambda} (\sigma/100 \text{ GeV})^3$ razy więcej niż całkowita masa wewnątrz dzisiejszej objętości Hubble'a. Ponadto istnienie takowych ścian prowadziłoby do nieakceptowalnie dużych fluktuacji temperatury w mikrofalowym promieniowaniu tła.

Choć symetria PQ jest symetrią ciągłą i wydawałoby się, że tym samym w teoriach aksjonu nie natrafiamy na ściany domenowe, to rzeczywistość okazuje się jednak bardziej skomplikowana. Jak pokazaliśmy wcześniej, potencjał dla pola aksjonu jest periodyczny (patrz rysunek 2.2) z okresem wynoszącym $2\pi f_a$. Nie oznacza to jednak automatycznie, iż stany różniące się w kącie θ o $2\pi f_a$ należy ze sobą utożsamiać - w niektórych modelach może się zdarzyć, że periodyczność stanu próżni wynosi $2\pi N_{\text{DW}} f_a$, gdzie tzw. *liczba ścian domenowych* $N_{\text{DW}} > 1$. Powoduje to istnienie zdegenerowanych próżni połączonych ze sobą dyskretną symetrią \mathbb{Z}_N . Jej spontaniczne łamanie powoduje powstanie ścian domenowych. Choć dla modelu KSVZ (z jednym ciężkim kwarkiem) mamy $N_{\text{DW}} = 1$, to taki problem pojawia się np. w modelu DFSZ, gdzie $N_{\text{DW}} = 6$.

Istnieją dwie główne metody uniknięcia sprzeczności modeli w których $N_{\text{DW}} > 1$ ze standardową kosmologią:

- bardzo słabe łamanie symetrii PQ - zbyt słabe by powodować jakiegokolwiek zauważalne efekty, jednak znoszące degenerację próżni, np. dodanie członu $\mu^3 \sigma$ do potencjału, z warunkiem $\mu^3 < 10^{-9} f_\pi^2 m_\pi^2 / f_a$,
- inflacja następująca po złamaniu symetrii PQ - gwałtowny wzrost entropii w tego typu scenariuszu spowodowałby „rozmycie” istniejących ścian domenowych.

Możliwe jest za to istnienie ścian domenowych na o wiele mniejszej skali, o ile ich brzeg stanowić będą struny (omówione w następnym podrozdziale). Takie układy wypromieniowują energię w postaci fal grawitacyjnych i aksjonów (ogólniej: bozonów Goldstone'a związanych ze złamaniem określonej symetrii globalnej), dając tym samym wkład do gęstości energii reliktowych aksjonów.

4.1.2. Kosmiczne struny

Podczas gdy ściany domenowe są obiektami dwuwymiarowymi, to struny kosmiczne są efektywnie jednowymiarowe (ich szerokość jest zaniedbywalna w porównaniu do ich promienia krzywizny). Powstają gdy rozmaitość zdegenerowanych stanów próżni jest niejednospójna, czyli jeśli mapa M na S^1 jest nietrywialna:

$$\pi_1(M) \neq I.$$

W zależności od modelu możemy mieć struny powstałe zarówno na skutek spontanicznego łamania symetrii cechowania jak i symetrii globalnej. Jako że struny aksjonowe są strunami

globalnymi związanymi z symetrią $U_{PQ}(1)$, skoncentrujemy się na omówieniu przypadku całkowicie złamanej symetrii globalnej $U(1)$. Struny powstaną gdyż rozmaitość M jest wtedy izomorficzna z S^1 , więc $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$. By zobaczyć, że w takim modelu istotnie istnieją zlokalizowane, jednowymiarowe, statyczne rozwiązania, rozważmy prosty lagranżjan:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \lambda (|\phi|^2 - \frac{1}{2} \eta^2)^2, \quad (4.5)$$

z którego otrzymujemy równanie ruchu dla pola ϕ

$$\square \phi + \lambda (|\phi|^2 - \frac{1}{2} \eta^2) \phi = 0. \quad (4.6)$$

Poszukajmy statycznego, osiowosymetrycznego rozwiązania postaci

$$\phi = \frac{\eta}{\sqrt{2}} f(m_s \rho) e^{in\varphi}, \quad (4.7)$$

gdzie m_s to masa bozonu skalarnego powstałego na wskutek spontanicznego złamania symetrii, (ρ, φ) to współrzędne walcowe, n jest liczbą naturalną numerującą rozwiązania („liczbą nawinięć”), natomiast f to pewna dowolna funkcja. Po wstawieniu do (4.6) otrzymujemy równanie na funkcję f

$$f'' + \frac{1}{\xi} f' - \frac{n^2}{\xi^2} f - \frac{1}{2} (f^2 - 1) f = 0, \quad (4.8)$$

gdzie $\xi = m_s \rho$ oraz „prim” oznacza pochodną po ξ . Nieliniowość powyższego równania sprawia, iż nie znamy analitycznej postaci funkcji f , możemy jednak badać zachowanie asymptotyczne. Ponieważ $\phi(\rho = 0) = 0$ to z ciągłości mamy

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} f = 0. \quad (4.9)$$

Z drugiej strony, dla dużych wartości ξ , chcemy by pole ϕ dążyło do wartości próżniowej, czyli

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} f = 1. \quad (4.10)$$

Można pokazać, że dla dużych ξ funkcja ta zachowuje się jak $\frac{n^2}{\xi^2}$, stąd też gęstość energii zdefiniowana przez

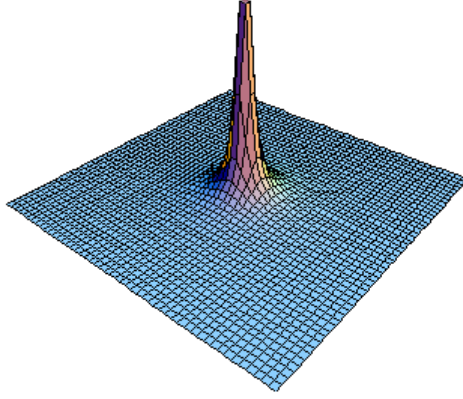
$$\mathcal{E} = |\partial_t \phi|^2 + |\nabla \phi|^2 + V(\phi), \quad (4.11)$$

zachowuje się wtedy jak

$$\mathcal{E} \propto \frac{\eta^2 m_s^2 n^2}{2 \xi^2}. \quad (4.12)$$

Jak sama nazwa wskazuje struna jest obiektem dobrze zlokalizowanym w przestrzeni, o czym można się przekonać rozwiązując powyższe równanie numerycznie dla odpowiednich warunków brzegowych. Otrzymamy wtedy zależność gęstości energii w płaszczyźnie przekroju poprzecznego struny. Ilustracja wykresu tego typu znajduje się na rysunku 4.2.

Widzimy, że struna oprócz zlokalizowanej części posiada „ogon” znikający jak $\frac{n^2}{\xi^2}$. Opisuje on pole bozonów Goldstone’a (czyli w interesującym nas przypadku aksjonów) wytworzone przez strunę. Oznacza to, że struna aksjonowa oddziałując z zewnętrznym polem wypromieniowuje energię w postaci aksjonów, co stanowi według niektórych scenariuszy znaczący mechanizm ich produkcji we wczesnym Wszechświecie. Ponadto istnienie tego zewnętrznego pola powoduje, że liniowa gęstość energii struny globalnej jest rozbieżna logarytmicznie. Na szczęście, z kosmologicznego punktu widzenia, nie powoduje to specjalnych trudności, jako że



Rysunek 4.2: Ilustracja gęstości energii struny globalnej w płaszczyźnie jej przekroju poprzecznego.

mamy naturalne obcięcie związane ze skalą strun Λ (typowa krzywizna struny oraz typowa odległość pomiędzy strunami jest rzędu Λ [26]). Dla struny o szerokości $R \gg m_s^{-1}$, mamy

$$\mu \propto n^2 \eta^2 \log\left(\frac{\Lambda}{m_s R}\right). \quad (4.13)$$

O polu generowanym przez strunę można myśleć jako o polu „typu Coulomba” [27], które powoduje silne sprzężenie struny z aksjonami.

Numeryczne symulacje (patrz np. referencje w [25]) z sieciami strun prowadzą do wniosku, że szybko po uformowaniu się, struny dążą do tzw. *rozwiązania skalującego*, dla którego sumaryczna gęstość energii istniejących strun zachowuje się jak

$$\rho_s \approx \frac{\mu}{t^2}. \quad (4.14)$$

Ważnym zjawiskiem w ewolucji strun są ich wzajemne oddziaływania, w szczególności możliwe łączenie i dzielenie się strun. Skomplikowane symulacje numeryczne prowadzą tutaj do bardzo ciekawych wniosków, wykraczających poza zakres tej pracy, np. do potencjalnej roli strun lokalnych w formowaniu się galaktyk. Dokładne omówienie tego, jak i wielu innych tematów dotyczących defektów topologicznych można znaleźć w monografii [28].

Na zakończenie tego rozdziału warto dodać, że jak najbardziej możliwymi są rozwiązania, w których różne defekty topologiczne tworzą bardziej skomplikowane struktury. O jednym przypadku już wspomnieliśmy, mianowicie ścianach otoczonych przez struny, lecz możliwe są również inne kombinacje, uwzględniające także monopole jako defekty punktowe. Bogactwo tych rozwiązań czyni dziedzinę zajmującą się defektami topologicznymi w kosmologii zarówno niezwykle fascynującą jak i obiecującą.

4.2. Produkcja aksjonów we wczesnym Wszechświecie

Celem tego rozdziału jest otrzymanie oszacowania na gęstość energii aksjonów reliktowych, czyli takich które powstały niedługo po Wielkim Wybuchu i pozostały aż do dnia dzisiejszego. Istnieją trzy scenariusze ich powstawania: termiczny, pewien szczególny mechanizm wynikający z niedopasowania próżni oraz rozpad strun i ścian domenowych. Pierwszy z nich występuje w prawie każdym modelu aksjonu, jednak daje mały wkład do gęstości, gdyż aksjony termiczne są bezsprzecznie relatywistyczne. Pozostałe dwa powodują powstanie zimnych (nierelatywistycznych) aksjonów o znaczącej gęstości energii.

4.2.1. Aksjony termiczne

Z bardzo dobrym przybliżeniem we wczesnym Wszechświecie występował stan równowagi termodynamicznej. Wszystkie możliwe cząstki - wraz z aksjonami - nieustannie tworzyły się i rozpadały lub anihilowały. W miarę upływu czasu Wszechświat się rozszerzał, a jego temperatura malała. Powoli przestawało wystarczać energii na podtrzymywanie niektórych reakcji, przez co cząstki biorące w nich udział coraz słabiej oddziaływały z otoczeniem. Gdy wpływ tego oddziaływania stawał się słabszy niż wpływ rozszerzania się Wszechświata, cząstki te efektywnie odprzęgały się od reszty materii i promieniowania - po czym spokojnie ewoluowały do chwili obecnej tworząc populację reliktową. Ten scenariusz opisuje w standardowej kosmologii historię najpierw neutrin, a później fotonów. Jeśli jednak „niewidzialne aksjony” rzeczywiście istnieją, to z uwagi na ich bardzo słabe oddziaływanie z materią powinny odprząc się jeszcze na długo przed neutrinami, tak więc ich dzisiejsza populacja reliktoowa byłaby świadkiem wydarzeń z samych początków naszego Wszechświata. Czy jednak taka populacja istnieje? W tym podrozdziale postaramy się odpowiedzieć na to pytanie, jak również policzyć obecną gęstość reliktowych aksjonów powstałych na skutek ich oddziaływania z materią.

W tym celu przyjrzyjmy się dokładniej momentowi odprzęgania. Następuje on w przybliżeniu w momencie gdy całkowity przekrój czynny na wszystkie reakcje podtrzymujące aksjon w stanie równowagi staje się porównywalny ze stałą Hubble’a: $\Gamma \approx H$. W okolicy tego momentu gęstość aksjonów $n_a(t)$ opisywana jest przez równanie Boltzmanna, które dla metryki Friedmanna-Robertsona-Walkera (FRW) przybiera postać

$$\frac{dn_a}{dt} + 3Hn_a = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \hat{C}[f] \frac{d^3p}{E}, \quad (4.15)$$

gdzie g to liczba wewnętrznych stopni swobody cząstki (dla aksjonu $g = 1$), a $f = f(p^\mu, x^\mu)$ to funkcja rozkładu w przestrzeni fazowej. Z modeli aksjonu wiemy, że procesy utrzymujące go w równowadze z otoczeniem są głównie typu $a + i \leftrightarrow 1 + 2$, gdzie a oznacza aksjon, natomiast $i, 1$ i 2 inne cząstki. Dla procesów tego typu $\hat{C}[f]$, czyli tzw. *operator zderzeniowy* jest postaci

$$\begin{aligned} \frac{g}{(2\pi)^3} \int \hat{C}[f] \frac{d^3p}{E} &= - \int d\Pi_a d\Pi_i d\Pi_1 d\Pi_2 (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_i - p_1 - p_2) \cdot \\ &[|M|_{a+i \rightarrow 1+2}^2 f_a f_i (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - |M|_{1+2 \rightarrow a+i}^2 f_1 f_2 (1 \pm f_a)(1 \pm f_i)], \end{aligned}$$

gdzie znak „+” jest dla bozonów natomiast „-” dla fermionów oraz

$$d\Pi_i \equiv \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_i}{2E_i}. \quad (4.16)$$

Poczynimy dwa istotne przybliżenia, które bardzo uprosczą powyższe równanie. Po pierwsze założymy zachowanie symetrii CP (czyli inaczej zachowanie T), co prowadzi do

$$|M|_{a+i \rightarrow 1+2}^2 = |M|_{1+2 \rightarrow a+i}^2 = |M|^2. \quad (4.17)$$

Drugim przybliżeniem będzie używanie statystyki Maxwella-Boltzmana w miejsce statystyk Fermiego-Diraca dla fermionów i Bosego-Einsteina dla bozonów². W tej sytuacji, z dala od przypadku zdegenerowanego gazu fermionów czy kondensatu Bosego-Einsteina możemy pominąć czynniki $1 \pm f \approx 1$ oraz mamy

$$f_i(E_i) = e^{-\frac{E_i - \mu_i}{T}}. \quad (4.18)$$

²W przypadku braku zdegenerowanego gazu fermionów czy kondensatu Bosego-Einsteina to przybliżenie nie powoduje istotnej zmiany, gdyż wszystkie te trzy rozkłady są bardzo podobne dla pędów w okolicy maksimum rozkładów, a dla przypadku relatywistycznego są wręcz prawie identyczne w granicy $(m_i - \mu_i)/T \gg 1$.

Równanie Boltzmana (4.15) przybiera formę

$$\frac{dn_a}{dt} + 3Hn_a = - \int d\Pi_a d\Pi_i d\Pi_1 d\Pi_2 (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_i - p_1 - p_2) |M|^2 (f_a f_i - f_1 f_2). \quad (4.19)$$

Równanie to można wyrazić w bardziej przyjaznej formie³

$$\frac{dn_a}{dt} + 3Hn_a = - \langle v \sigma_{a+i \rightarrow 1+2} \rangle n_i (n_a - n_a^{eq}), \quad (4.20)$$

gdzie indeks eq odnosi się do wartości w stanie równowagi termodynamicznej (przed odprężeniem). Użyliśmy tutaj definicji średniej termicznej przekroju czynnego na reakcję postaci $a + i \rightarrow 1 + 2$:

$$\begin{aligned} \langle v \sigma_{a+i \rightarrow 1+2} \rangle = & (n_a^{eq})^{-1} (n_i^{eq})^{-1} \int d\Pi_a d\Pi_i d\Pi_1 d\Pi_2 (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_i - p_1 - p_2) \cdot \\ & \cdot |M|^2 e^{-(E_i - \mu_i)/T} e^{-(E_a - \mu_a)/T}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Żeby otrzymać (4.20), skorzystaliśmy z tożsamości wynikającej z zasady zachowania energii i równości potencjałów chemicznych w stanie równowagi

$$f_1^{eq} f_2^{eq} = e^{-(E_1 - \mu_1)/T} e^{-(E_2 - \mu_2)/T} = e^{-(E_1 + E_2)/T} e^{(\mu_1 + \mu_2)/T} = e^{-(E_a + E_i)/T} e^{(\mu_a + \mu_i)/T} = f_a^{eq} f_i^{eq} \quad (4.22)$$

oraz zauważyliśmy, że ponieważ interesuje nas sytuacja, gdy aksjony się odprężają, natomiast pozostałe cząstki z uwagi na inne oddziaływania pozostają ciągle w równowadze, to $f_1^{eq} f_2^{eq} = f_1 f_2$.

Zależność n_a^{eq} od temperatury, a więc i od czasu, otrzymuje się korzystając z definicji gęstości cząstek jako całki po przestrzeni fazowej z rozkładu f , który w przypadku aksjonu jest dany przez rozkład Bosego-Einsteina. Następnie wykorzystujemy przybliżenie relatywistyczne, jako że aksjon ma niezwykle małą masę spoczynkową, skąd otrzymujemy zależność (parz np. [25]):

$$n_a^{eq} = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3, \quad (4.23)$$

gdzie funkcja zeta Riemanna w tym punkcie ma w przybliżeniu wartość $\zeta(3) = 1,202\dots$ Wczesny Wszechświat był całkowicie zdominowany przez promieniowanie (RD), zatem w tym okresie temperatura była odwrotnie proporcjonalna do czynnika skali $T \propto R^{-1}$. Stąd po zróżniczkowaniu po czasie (4.23) otrzymamy

$$\frac{dn_a^{eq}}{dt} + 3Hn_a^{eq} = 0. \quad (4.24)$$

Razem z (4.20) daje to

$$\frac{d}{dt} [R^3 (n_a - n_a^{eq})] = -\Gamma R^3 (n_a - n_a^{eq}), \quad (4.25)$$

gdzie $\Gamma = \sum_i n_i \langle v \sigma_{a+i \rightarrow 1+2} \rangle$ - całkowity przekrój czynny na wszystkie możliwe reakcje typu $a + i \leftrightarrow 1 + 2$. Powyższe równanie wygodnie jest wyrazić w zmiennych współbieżnych

$$Y'(x) = -\frac{\Gamma}{xH} (Y - Y_{eq}), \quad (4.26)$$

³Przy założeniu, że $f_i = b_i(t) f_i^{eq}$ i analogicznie $f_a = b_a(t) f_a^{eq}$, co jest spełnione dla szerokiej klasy funkcji rozkładu.

gdzie Y to gęstość cząstek w objętości współbieżnej $Y \equiv \frac{n_a}{s}$, a „prim” oznacza różniczkowanie po $x \equiv \frac{t}{H}$. Interesuje nas pytanie, czy w ogóle powstanie reliktowa populacja aksjonów, przyjmujemy więc warunek początkowy $Y(0) = 0$, z którym to rozwiązanie można łatwo zapisać jako

$$Y(x) = Y_{eq} \left[1 - \exp\left(-\int_0^x \frac{\Gamma}{x'H} dx'\right) \right]. \quad (4.27)$$

Wprowadzając relatywistyczną efektywną liczbę stopni swobody g_{*s} , gęstość entropii dana jest wyrażeniem

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3. \quad (4.28)$$

W okresie którym jesteśmy zainteresowani, wszystkie cząstki poza aksjonami były w równowadze termicznej, więc $g_{*s} = g_*$, a zatem

$$Y_{eq} = \frac{n_a^{eq}}{s} = \frac{45\zeta(3)}{2\pi^4} \frac{1}{g_*} \approx \frac{0,27}{g_*}. \quad (4.29)$$

Dla Modelu Standardowego z jednym dubletem Higgsa i trzema rodzinami mamy

$$g_* = g_{\text{bozon}} + \frac{7}{8} g_{\text{fermion}} = \underbrace{2}_{\gamma} + \underbrace{2 \cdot 8}_g + \underbrace{2 \cdot 3}_{W^\pm, Z} + \underbrace{4}_H + \frac{7}{8} [\underbrace{2 \cdot 3}_\nu + \underbrace{4 \cdot 3}_l + \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4}_q] = 106,75. \quad (4.30)$$

(Jeśli rozważamy moment przed odprzęgnięciem się aksjonu należy dodać jeszcze jeden stopień swobody.)

Ponieważ we wczesnym okresie dominowało promieniowanie, to z równań Friedmanna mamy zależność stałej Hubble'a od temperatury

$$H = \sqrt{\frac{4\pi^3}{45}} \sqrt{g_*} \frac{T^2}{m_{Pl}}, \quad (4.31)$$

gdzie przez m_{Pl} oznaczyliśmy standardowo masę Plancka. Widzimy, że w równaniu (4.27) znamy wszystko oprócz Γ . Aby pójść dalej, trzeba zatem policzyć całkowity przekrój czynny na wszystkie możliwe reakcje z udziałem aksjonu. Ograniczymy się jedynie do trzech typów reakcji, będących z jednej strony najbardziej znaczącymi, z drugiej zaś najmniej zależnymi od konkretnych modeli aksjonu (wzorujemy się tutaj na pracy [55]). Mianowicie weźmiemy pod uwagę procesy

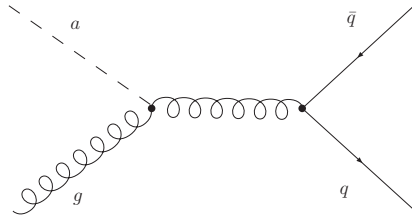
(1) $a + g \leftrightarrow q + \bar{q}$

(2) $a + q \leftrightarrow g + q$ (oraz $a + \bar{q} \leftrightarrow g + \bar{q}$)

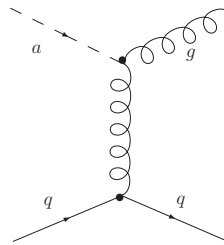
(3) $a + g \leftrightarrow g + g$

Te procesy występują we wszystkich modelach aksjonu, gdyż oddziaływanie z gluonami jest elementem niezbędnym teorii efektywnej po złamaniu symetrii PQ. Ponadto by mechanizm Peccei-Quinn działał, trzeba nadać ładunki PQ co najmniej jednemu kwarkowi. Diagramy Feynmana odpowiadające powyższym procesom przedstawione są na rysunkach 4.3, 4.4 i 4.5.

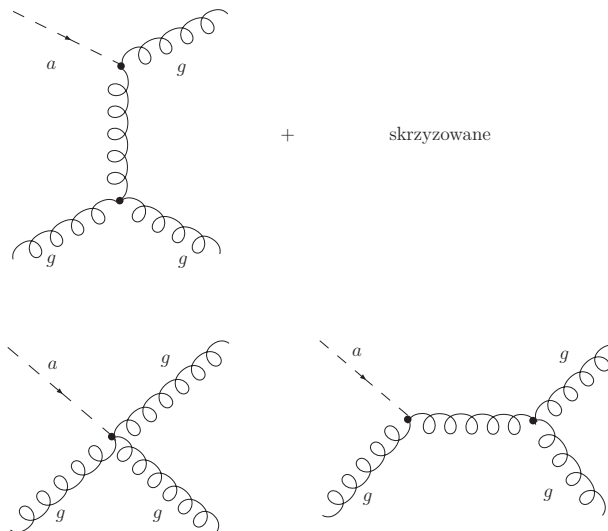
Możliwe są oczywiście jeszcze inne procesy, jak np. oparte na efekcie Primakoffa (oddziaływaniu z fotonami), jednak sprzężenie $g_{a\gamma\gamma}$ silnie zależy od modelu i w niektórych przypadkach może być wręcz zaniedbywalnie małe.



Rysunek 4.3: Diagram dla procesu $a + g \leftrightarrow q + \bar{q}$.



Rysunek 4.4: Diagram dla procesu $a + q \leftrightarrow g + q$.



Rysunek 4.5: Diagramy dla procesu $a + g \leftrightarrow g + g$.

Po obliczeniu wkładów od powyższych diagramów, otrzymujemy (rachunki przedstawiliśmy w dodatku A) dla energii rzędu 10^{12} GeV

$$\Gamma = 1,6 \cdot 10^{-6} \frac{T^3}{f_a^2}. \quad (4.32)$$

Tak więc skoro $\Gamma \propto T^3$ to $\frac{\Gamma}{H} \propto x^{-1}$, skąd wygodnie zdefiniować stałą

$$k := x \frac{\Gamma}{H}. \quad (4.33)$$

Wykorzystamy fakt, że Y_{eq} jest niezależne od x i definiując zmienną $\eta(x) = \frac{Y(x)}{Y_{eq}}$ otrzymujemy z (4.26) równanie

$$x^2 \frac{d\eta}{dx} = k(1 - \eta), \quad (4.34)$$

które łatwo rozwiązać:

$$\eta(x) = 1 - e^{k(1/x-1)}. \quad (4.35)$$

Warunek początkowy braku aksjonów w momencie $T = f_a$ (czyli $x = 1$) wyraża się poprzez $\eta(1) = 0$. Widzimy, że na początku η (a więc liczba aksjonów) rośnie z x . W momencie odprężania aksjonów od plazmy QCD mamy $\Gamma = H$, czyli $x = k$. Po odprężeniu wartość η pozostaje stała i mamy $Y = Y_d = \text{const}$.

Teraz już możemy odpowiedzieć na pytanie o warunek na istnienie obecnie populacji reliktywnej aksjonów o spektrum termicznym. Aby to miało miejsce, Y_d nie może się zbyt różnić od Y_{eq} . Ustalając poziom zgodności na 95% otrzymamy

$$\frac{Y_d}{Y_{eq}} = \eta(x = k) = 1 - e^{k(1/k-1)} > 0,95 \quad \text{skąd} \quad k > 4. \quad (4.36)$$

Z powyższego, definicji k oraz wartości (4.32) otrzymujemy warunek na stałą f_a

$$k = \frac{f_a}{T} \frac{\Gamma}{H} \approx 1,1 \cdot 10^{12} \frac{\text{GeV}}{f_a}. \quad (4.37)$$

W takim razie by istniała populacja aksjonów termicznych musi być spełniony warunek

$$f_a < 2,8 \cdot 10^{11} \text{ GeV}.$$

Nierówność ta oznacza, że jeśli aksjony istnieją i jeśli w okolicy momentu ich odprężania nie zachodziła inflacja, to dziś najprawdopodobniej istnieje reliktywna populacja termiczna. Spowodowane jest to tym, że powyższe ograniczenie jest bardzo bliskie warunkowi, jaki wynika z faktu, że wkład aksjonów do gęstości energii nie może przekraczać wartości krytycznej (do tego ograniczenia wrócimy pod koniec rozdziału, po omówieniu produkcji zimnych aksjonów).

W przypadku gdy Wszechświat nie przechodził przez okres inflacji po odprężeniu się aksjonów, możemy policzyć ich aktualną gęstość w zależności od temperatury w momencie odprężania i zmiany czynnika skali od tamtego momentu do dzisiaj

$$n_a^{th}(t_0) = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_d^3 \left(\frac{R_d}{R_0} \right)^3 = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_{a0}^3. \quad (4.38)$$

Dzisiejsza temperatura aksjonów reliktywnych powiązana jest z temperaturą fotonów

$$T_{a0} = \left(\frac{4}{11} \frac{106,75}{g_{*d}} \right)^{1/3} T_{\gamma 0}, \quad (4.39)$$

co dla $T_{\gamma 0} = 2,73$ K daje

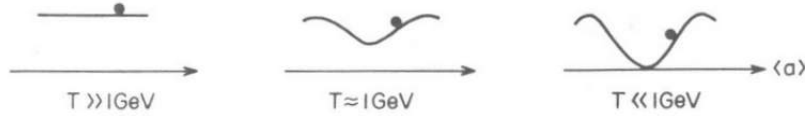
$$n_a^{th}(t_0) \approx 7,5 \text{ cm}^{-3}. \quad (4.40)$$

Uzyskaliśmy wniosek, że proces ten daje wkład do gęstości energii Wszechświata porównywalny z wkładem od neutrino reliktowych czy fotonów relikтового promieniowania tła. Co jednak istotne, obecność aksjonów termicznych nie jest silnie zależna od konkretnego modelu i występuje praktycznie niezależnie od wartości skali łamania symetrii PQ.

4.2.2. Produkcja wynikająca z niedopasowania próżni

Aksjony powstają również na skutek wyjątkowego, nietermicznego procesu związanego z dynamiką kąta $\bar{\theta}$. Jak wiemy, mechanizm PQ powoduje ustabilizowanie jego wartości na $\bar{\theta} = 0$, co implikuje zachowanie CP. Nie mamy jednak żadnego powodu by oczekiwać, że również początkowa wartość parametru $\bar{\theta}$ wynosi zero, gdyż na skalach energii większych od skali łamania symetrii PQ mechanizm ten nie jest obecny. Oznacza to, że dla bardzo wczesnego Wszechświata mamy pełne prawo podejrzewać, że kąt $\bar{\theta}$ jest przesunięty od swojej wartości statycznej.

W momencie „włączenia się” potencjału dla pola aksjonu, przy temperaturze $T \approx 1$ GeV, zacznie on ewoluować w kierunku osiągnięcia stanu statycznego z ustalonym $\bar{\theta} = 0$. Schematycznie zostało to przedstawione na rysunku 4.6. Gdy aksjony zaczną znajdować się w potencjale z początkową wartością różną od statycznej, zaczną „staczać się” by ją osiągnąć, po czym w sposób nieunikniony zaczną wokół niej oscylować. Te oscylacje pola aksjonu odpowiadają kondensatowi aksjonów o energii kinetycznej niezwykle małej w porównaniu do ich energii spoczynkowej. Stąd w czasie przejścia fazowego przy złamaniu symetrii PQ powstaje populacja aksjonów będąca świetnym kandydatem na zimną ciemną materię.



Rysunek 4.6: Włączanie się potencjału podczas spadania temperatury T poniżej 1 GeV (wzięte z pracy [19]).

Przyjrzyjmy się teraz dokładniej ewolucji pola aksjonu $a(x)$. Po złamaniu symetrii PQ gęstość lagranżjanu dla pola aksjonu składa się z części kinetycznej oraz potencjału

$$\mathcal{L}_a = \frac{1}{2} \partial_\mu a \partial^\mu a - V(a). \quad (4.41)$$

We wczesnym Wszechświecie krzywizna jest zaniedbywalna, więc metryka FRW upraszcza się do przypadku metryki konforemnie płaskiej

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2]. \quad (4.42)$$

Równania ruchu wynikające z wariacji działania będącego całką z gęstości lagranżjanu (4.41) mają postać

$$D_\mu \partial^\mu a(x) + V'(a(x)) = 0, \quad (4.43)$$

skąd rozpisując pochodną kowariantną dla metryki (4.42) otrzymamy

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 3H \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{1}{R^2} \Delta a + V'(a) = 0. \quad (4.44)$$

Potencjał efektywny dla pola aksjonu nie jest znany, jednak z rozważań poczynionych przy omawianiu mechanizmu Peccei-Quinn (patrz rozdział 2.3) wydaje się naturalne, że można go przybliżyć przez

$$V(a) = f_a^2 m_a^2 \left(1 - \cos \frac{a}{f_a}\right), \quad (4.45)$$

gdzie masa efektywna zależy od temperatury, a tym samym i od czasu $m_a^2 = m_a^2(T(t))$. Otrzymujemy więc równanie ruchu

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 3H \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{1}{R^2} \Delta a + m_a^2 f_a \sin \frac{a}{f_a} = 0. \quad (4.46)$$

Możliwe są trzy jakościowo różne scenariusze (T_{RH} to temperatura podgrzewania po inflacji):

- (1) Inflacja nastąpiła po złamaniu symetrii PQ, czyli $T_{PQ} > T_{RH}$,
- (2) Inflacja nastąpiła przed złamaniem symetrii PQ, czyli $T_{PQ} < T_{RH}$,
- (3) Inflacji nie było.

Dla przypadku 1 pole aksjonu będzie jednorodne na bardzo dużych skalach, co spowoduje istnienie dla niego jedynie modu zerowego i ewolucja jest stosunkowo prosta - inflacja spowoduje również brak defektów topologicznych (ścian domenowych i strun aksjonowych). Istotnie zmniejszy to reliktową populację zimnych aksjonów, jednak bardzo pomaga w kwestii problemu niezgodności ścian domenowych ze standardową kosmologią. W przypadkach 2 i 3 obecne są zarówno mody zerowe jak i wyższe, pojawiają się też struny oraz ściany domenowe, które następnie wypromieniowując aksjony dają dodatkowy mechanizm ich produkcji we wczesnym Wszechświecie, który omówimy w następnym podrozdziale.

Mod zerowy

Dla modu zerowego pole aksjonu jest jednorodne w przestrzeni, co pozwala pominąć człon z laplasjanem w równaniu ruchu (4.46). Toteż w okresie RD mamy

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2t} \frac{da}{dt} + m_a^2 f_a \sin \frac{a}{f_a} = 0. \quad (4.47)$$

Oznaczmy przez t_m czas, w którym „włącza się” potencjał dla pola aksjonu (następuje to w okolicy $T_m \approx 1$ GeV, patrz np. [29]). W tym momencie aksjon nabiera masy, zatem dla czasów sporo wcześniejszych $t \ll t_m$ mamy w przybliżeniu

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2t} \frac{da}{dt} = 0. \quad (4.48)$$

To równanie ma proste rozwiązanie

$$a(t) = a_0 + a_{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.49)$$

które wraz z upływem czasu dąży do stałej. W okolicy $t \approx t_m$, przy założeniu, że początkowa wartość pola aksjonu jest mała w porównaniu do f_a , przybliżamy potencjał przez $m_a^2 f_a \sin \frac{a}{f_a} \approx m_a^2 a$. Mamy wtedy równanie

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{2t} \frac{da}{dt} + m_a^2 a = 0, \quad (4.50)$$

które, w przypadku gdy H jest małe w porównaniu do m_a oraz zmiana masy jest adiabatyczna $\frac{d}{dt} \log m_a \ll m_a$, ma przybliżone rozwiązanie postaci

$$a(t) = A(t) \cos(m_a t), \quad (4.51)$$

gdzie zależna od czasu amplituda spełnia

$$\frac{d(m_a A^2)}{dt} = -3H m_a A^2. \quad (4.52)$$

Z powyższego równania otrzymujemy warunek

$$\frac{(m_a A^2)_f}{(m_a A^2)_i} = \left(\frac{R_i}{R_f} \right)^3. \quad (4.53)$$

Indeksy i oraz f odnoszą się odpowiednio do momentów początkowego i końcowego. Powyższe wyniki mają prostą interpretację fizyczną. Z równania (4.51) odczytujemy, że mod zerowy pola aksjonu ma gęstość energii równą $\rho_a = \frac{1}{2} m_a^2 A^2$ i zachowuje się jak stan koherentny $n_a = \frac{1}{2} m_a A^2$ aksjonów w spoczynku. Równanie (4.53) mówi natomiast, że ich liczba w objętości współbieżnej jest zachowana. Wynik ten nie jest zaskakujący, jako że pominęliśmy jakiegokolwiek rozpadu aksjonu i założyliśmy adiabatyczną zmianę masy $m_a(t)$.

Aby oszacować liczbowo dzisiejszą gęstość aksjonów w modzie zerowym założymy, że w chwili złamania symetrii PQ pole aksjonu przyjmuje losową wartość, co pozwoli nam zapisać $a(t_m) = f_a \alpha_m$, gdzie parametr α_m (zwany *początkowym kątem niedopasowania*) przyjmuje losową wartość z przedziału $[-\pi, \pi]$. Uśredniając po czasie otrzymamy

$$n_a(t_m) = \frac{1}{2} m_a(t_m) A^2(t_m) = \frac{1}{2} m_a(t_m) f_a^2 \alpha_m^2, \quad (4.54)$$

skąd, ponieważ są to cząstki nierelatywistyczne, możemy otrzymać ich gęstość w chwili obecnej

$$n_a(t_0) = \frac{1}{2} m_a(t_m) f_a^2 \alpha_m^2 \left(\frac{R_m}{R_0} \right)^3, \quad (4.55)$$

oraz energię

$$\rho_a(t_0) = \frac{1}{2} m_a(t_m) m_a(t_0) f_a^2 \alpha_m^2 \left(\frac{R_m}{R_0} \right)^3. \quad (4.56)$$

Teraz w zależności od rozpatrywanego przypadku możemy mieć dwie sytuacje:

1. Wszechświat nie przeszedł przez okres inflacji (przypadek 3), wtedy w dziś obserwowanym Wszechświecie znajduje się około 10^{30} regionów nie będących związanymi przyczynowo w momencie, gdy pole aksjonu zaczęło oscylować. Rozsądnym wydaje się więc określenie kwadratu początkowego kąta niedopasowania jako średniej kwadratowej po wszystkich możliwych kątach

$$\alpha_m = \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha'_m \frac{\alpha_m'^2}{2\pi} \right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \quad (4.57)$$

2. Jeśli zaś inflacja zachodziła (przypadki 1 i 2), to cały obserwowany Wszechświat leży w jednym obszarze przyczynowo związanym, w którym to α_m przyjmuje tę samą wartość. Nie znamy żadnego powodu, dla którego należałoby wybrać którąkolwiek z wartości w przedziale $[-\pi, \pi]$.

Wykonując dokładniejsze rachunki Turner [30] otrzymał wkład modu zerowego aksjonów do dzisiejszej gęstości energii:

$$\Omega_{\text{MZ}} h^2 = 0,13 \cdot 10^{\pm 0,4} \Lambda_{200}^{-0,7} f(\alpha_m) \alpha_m^2 (m_a/10^{-5} \text{ eV})^{-1,18}, \quad (4.58)$$

gdzie $\Lambda_{200} = \Lambda_{\text{QCD}}/200 \text{ MeV}$, czynnik $10^{\pm 0,4}$ odzwierciedla niepewności teoretyczne, natomiast funkcja f opisuje efekty anharmoniczne i jest monotonicznie rosnąca z $f(0) = 1$.

Zauważmy na koniec, że ten sposób produkcji aksjonów jest daleki od termicznego, gdyż $\Omega_{\text{MZ}} \propto m_a^{-1,18}$ (w przypadku termicznym mieliśmy $\Omega_{\text{TH}} \propto m_a$). Oznacza to też, że dla małych mas aksjonu możemy osiągnąć wartość krytyczną gęstości, skąd wynika ograniczenie na skalę łamania symetrii f_a .

Wyższe mody

Przejdźmy teraz do wkładu od wyższych modów. Poniższy rachunek należy traktować jedynie jako oszacowanie, które powie nam, czy wkład zimnych aksjonów powstałych na skutek tego procesu (z modu zerowego) nie jest zanedbywalnie mały w porównaniu z aksjonami relatywistycznymi. Więcej szczegółów można znaleźć w [31].

W scenariuszu gdy nie było inflacji po złamaniu symetrii PQ (czyli o temperaturze podgrzewania $T_{RH} < T_{PQ}$), który odpowiada przypadkom 2 i 3, pole aksjonu nie jest jednorodne w przestrzeni. Oznacza to, że nie można pominąć członu z laplasjanem w (4.46). Wstawiając transformatę Fouriera

$$a(\vec{x}, t) = \int d^3k a(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{x}}, \quad (4.59)$$

do równania (4.46) i pomijając człon potencjału (dla czasów $t \ll t_m$), otrzymamy równanie

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{3}{2t} \frac{d}{dt} + \frac{k^2}{R^2} \right) a(\vec{k}, t) = 0. \quad (4.60)$$

W czasie ewolucji poszczególnego modu mamy dwa reżimy w zależności od długości fali:

i) Poza horyzontem $\lambda(t) > t$, wtedy możemy pominąć człon $\frac{k^2}{R^2}$ i otrzymujemy proste rozwiązanie

$$a(\vec{k}, t) = a_0(\vec{k}) + a_{-\frac{1}{2}}(\vec{k}) t^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.61)$$

ii) Wewnątrz horyzontu $\lambda(t) < t$, wtedy definiując nową zmienną $\varphi(\vec{k}, t) = R^{\frac{3}{2}} a(\vec{k}, t)$ i wstawiając ją do (4.60) otrzymamy równanie

$$(\partial_t^2 + \omega^2(t)) \varphi(\vec{k}, t) = 0, \quad (4.62)$$

gdzie zależna od czasu częstość dana jest wzorem

$$\omega^2(t) = \frac{k^2}{R^2(t)} + \frac{3}{16t^2}. \quad (4.63)$$

Przy założeniu, że częstość jest wolnozmienną funkcją czasu $\dot{\omega}/\omega \ll \omega$, można otrzymać przybliżone rozwiązanie postaci

$$a(\vec{k}, t) = \frac{C}{R(t)} \cos\left(\int_0^t dt' \omega(t')\right), \quad (4.64)$$

skąd gęstość energii w zależności od częstości $\rho_{a,k} = \frac{1}{2} \frac{C^2 \omega^2}{R^2(t)} \propto R^{-4}$, czyli $n_{a,k} \propto R^{-3}$. Oznacza to, że liczba aksjonów w poszczególnych modach jest zachowana i pozwala oszacować dzisiejszą gęstość energii pochodzącą od wyższych modów:

$$\rho_a(t_0) \approx \frac{m_a^2 N^2 f_a^2}{2t_m} \left(\frac{R_m}{R_0} \right)^3. \quad (4.65)$$

Widać więc, że daje to wkład podobnego rzędu co od modu zerowego.

4.2.3. Rozpad strun i ścian domenowych

Na skutek przejścia fazowego pomiędzy okresami w historii Wszechświata raz o zachowanej symetrii PQ, a następnie o złamanej, powstaną nieuchronnie defekty topologiczne. We wszystkich modelach mamy do czynienia ze strunami, a ponadto w niektórych jeszcze ścianami domenowymi. Defekty te będą ewoluować i w trakcie swojej niezwykle skomplikowanej historii między innymi wypromieniowywać energię, głównie w postaci zimnych aksjonów. Procesy te są jeszcze bardzo słabo poznane i dlatego istnieje bardzo wiele wątpliwości co do konkretnych scenariuszy ewolucji powyższych defektów. Dokładne omówienie argumentacji przemawiających za różnymi wariantami leży daleko poza zakresem niniejszej pracy, tak więc tutaj ograniczymy się jedynie do podania oszacowań na wkład do gęstości energii reliktowych aksjonów. Ponadto przytoczymy wyniki dotyczące jedynie rozpadu strun kosmicznych, jako że można pokazać, iż rozpad ścian domenowych ma dużo mniejsze znaczenie [32].

W czasie Hubble'a t prawie cała energia sieci strun (o gęstości (4.14)) będzie wypromieniowana w postaci aksjonów o rozkładzie częstości danym wyrażeniem [28]

$$\frac{dn_a}{d\omega} \propto \frac{\zeta \mu_\omega}{\omega^2 t^2}, \quad (4.66)$$

gdzie μ_ω to liniowa gęstość energii struny w momencie emisji promieniowania oraz ζ to parametr rzędu jedynki, opisujący gęstość sieci. By otrzymać stąd szukane oszacowanie, należy powyższą zależność scałkować, do tego celu potrzebna jest jednak znajomość $\omega(t)$. W tym punkcie pojawiają się niejasności i różne argumenty przemawiają za różnymi scenariuszami. Davies [33] twierdzi, że wyprodukowane aksjony mają największą możliwą długość fali, tj. rzędu horyzontu, skąd $\omega(t) \approx t^{-1}$. Z drugiej strony Harari oraz Sikivie [34] utrzymują, że mają one spektrum $1/k$, co prowadzi do $\omega(t) \approx \log(f_a t) t^{-1}$. Daje to różnicę o czynnik około 100. Tak więc

$$\frac{n_a}{s} \approx \frac{f_a^2}{T_1 m_{Pl}} \quad \text{dla [33]} \quad (4.67)$$

lub też

$$\frac{n_a}{s} \approx \log(f_a t_1) \frac{f_a^2}{T_1 m_{Pl}} \quad \text{dla [34]}, \quad (4.68)$$

gdzie indeks „1” odnosi się do wielkości w momencie, gdy masa aksjonu staje się niezaniębwalna. Porównując to z wynikiem otrzymanym w procesie ustalania się kąta θ w punkcie zero, widzimy iż jest on tego samego rzędu, bądź też 100 razy większy. Wkład do gęstości energii jest postaci

$$\Omega_S h^2 \approx (m_a / 10^{-3} \text{ eV})^{-1.18} \quad \text{dla [33]} \quad (4.69)$$

lub też

$$\Omega_S h^2 \approx (m_a / 10^{-5} \text{ eV})^{-1.18} \quad \text{dla [34]}. \quad (4.70)$$

4.2.4. Ograniczenia kosmologiczne na skalę łamania symetrii PQ

Podsumowując, łącznie na skutek wszystkich trzech scenariuszy produkcji, we wczesnym Wszechświecie powstanie populacja reliktowych aksjonów, zarówno relatywistycznych jak i nierelatywistycznych. Relatywistyczne, stanowiące gorącą ciemną materię, powstają termicznie (co daje jednak zanedbywalnie mały wkład do gęstości energii) oraz z wyższych modów w procesie wynikającym z niedopasowania próżni. Ich wkład do dzisiejszej gęstości energii jest rzędu

$$\Omega_{\text{MC}}h^2 \approx N^2(m_a/10^{-5} \text{ eV})^{-1.18}, \quad (4.71)$$

natomiast aksjony nierelatywistyczne, będące zimną ciemną materią, powstają z zerowych modów w procesie wynikającym z niedopasowania próżni oraz na skutek rozpadu strun aksjonowych i ścian domenowych. Sumarycznie ich wkład jest rzędu (patrz równania (4.58) oraz (4.69) lub (4.70))

$$\Omega_{\text{MZ}}h^2 + \Omega_S h^2 \approx (m_a/10^{-3} \text{ eV})^{-1.18} \quad \text{lub} \quad \Omega_{\text{MZ}}h^2 + \Omega_S h^2 \approx (m_a/10^{-5} \text{ eV})^{-1.18}. \quad (4.72)$$

Warunek, by istnienie aksjonów nie domykało Wszechświata oznacza, że

$$\Omega_{\text{MC}}h^2 + \Omega_{\text{MZ}}h^2 + \Omega_S h^2 < 1, \quad (4.73)$$

skąd otrzymujemy ograniczenie co do rzędu wielkości na masę aksjonu. Jeśli w scenariuszu rozpadu strun rację ma Davis to człon ten wyraźnie zdominuje pozostałe i otrzymamy

$$m_a \gtrsim 10^{-3} \text{ eV},$$

jeśli zaś rację mają Harari i Sikivie, to wszystkie te wkłady są podobnego rzędu i ograniczenie będzie o wiele słabsze

$$m_a \gtrsim 10^{-5} \text{ eV}.$$

Dla modeli KSVZ i DFSZ (oraz wszystkich innych, w których masa aksjonu jest odwrotnie proporcjonalna do f_a i współczynnik proporcjonalności jest podobnego rzędu) można przetłumaczyć to na ograniczenie na skalę łamania symetrii PQ:

$$f_a \lesssim 10^{10} \text{ GeV} \quad \text{lub} \quad f_a \lesssim 10^{12} \text{ GeV}.$$

W pierwszym przypadku właściwie prawie wszystkie okna dla aksjonu opisywanego standardowymi modelami zostaną zamknięte i jedynie szukanie nowych rozwiązań, bądź niepewności teoretyczne w oszacowaniach mogą uratować te modele przed wykluczeniem. Jednak w drugim przypadku dla niewidzialnego aksjonu pozostaje jeszcze sporo miejsca.

Rozdział 5

Fenomenologia aksjonu

W tym rozdziale zajmiemy się możliwym wpływem istnienia aksjonu na różne eksperymenty i obserwacje astrofizyczne. Przedstawimy pokrótce zarówno wyniki istniejących doświadczeń, z których wynikają ograniczenia na parametry hipotetycznego aksjonu, jak i omówimy od strony teoretycznej różne możliwe metody dalszych poszukiwań. Wyczerpujące zestawienie można znaleźć np. w przeglądowej pracy [19]. W chwili obecnej przygotowywanych jest kilka nowych eksperymentów o planowanej czułości niewiele mniejszej niż wymagana do zweryfikowania istniejących modeli niewidzialnego aksjonu. Pozwala to mieć nadzieję, że już w przeciągu najbliższych kilku lat będziemy w stanie dotrzeć doświadczalnie do przewidywań istniejących teorii.

5.1. Ograniczenia eksperymentalne

5.1.1. Laboratoryjne

Istnienie aksjonu mogłoby spowodować drobne zmiany w interpretacji wyników wielu już przeprowadzonych eksperymentów. Zmiany te jednak, z uwagi na niezwykle słabe sprzężenie aksjonu do cząstek MS, byłyby w większości przypadków zanedbywalne i w istniejących wynikach ilościowych dotyczących tylko kilku znanych procesów można szukać ograniczeń na parametry aksjonu. Choć w zasadzie istnieje więcej ograniczeń, to skoncentrujemy się tutaj na przedstawieniu dwóch najistotniejszych, mianowicie dobrze zbadanych rozpadów mezonu K i ciężkich kwarkoniów, a także wpływu istnienia niezwykle lekkiego aksjonu na oddziaływania długozasięgowe.

Rozpad mezonu K, czarmonium J/Ψ i botonium Y

Ponieważ aksjon z konstrukcji musi sprzęgać się z gluonami, to już na poziomie co najwyżej dwupętlowym sprzęga się także z kwarkami. Parametryzując to sprzężenie na wzór sprzężenia Yukawy lagranżjanem fenomenologicznym

$$\mathcal{L}_{\text{ph}} = f_e \bar{e} i \gamma_5 e a + \sum_{i=u,d,\dots} f_i \bar{q}_i i \gamma_5 q_i a + \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{c_{a\gamma\gamma}}{f_a} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \dots \quad (5.1)$$

możemy określić ograniczenia na stałe f_i dla kwarków, wynikające z obserwowanych szerokości rozpadu. W szczególności, dla rozpadu mezonu K mamy doświadczalnie zmierzoną szerokość

$$\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ a) < 3,8 \cdot 10^{-8}. \quad (5.2)$$

Daje to silne ograniczenie na sprzężenia do lekkich kwarków, które można oszacować korzystając z mieszania aksjonu z pionem i znając szerokość rozpadu mezonu K na dwa piony. Otrzymuje się wtedy

$$f_u^2, f_d^2 < 4 \cdot 10^{-10},$$

podczas gdy warunki na sprzężenia do cięższych kwarków dają rozpady kwarkoniów. Można policzyć stosunki ich szerokości rozpadu na aksjon i foton, do szerokości rozpadu na mion i antymion, dane przez

$$\frac{\Gamma(J/\Psi \rightarrow a + \gamma)}{\Gamma(J/\Psi \rightarrow \mu^+ + \mu^-)} = \frac{f_c^2}{2\pi\alpha} \quad (5.3)$$

oraz analogicznie

$$\frac{\Gamma(Y \rightarrow a + \gamma)}{\Gamma(Y \rightarrow \mu^+ + \mu^-)} = \frac{f_d^2}{2\pi\alpha}. \quad (5.4)$$

Wartości eksperymentalne tych szerokości to (dla rozpadów na aksjon z dokładnością tylko co do rzędu wielkości)

$$\begin{aligned} \Gamma(J/\Psi \rightarrow a + \gamma) &< 10^{-5} \\ \Gamma(Y \rightarrow a + \gamma) &< 10^{-4} \\ \Gamma(J/\Psi \rightarrow \mu^+ + \mu^-) &< 0.069 \pm 0.009 \\ \Gamma(Y \rightarrow \mu^+ + \mu^-) &< 0.028 \pm 0.002 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Otrzymujemy stąd ograniczenia

$$\begin{aligned} f_c^2 &\lesssim 10^{-6}, \\ f_d^2 &\lesssim 10^{-4}. \end{aligned}$$

Oddziaływania długi zasięgowe

Gdyby aksjon był zbyt lekki, mogłoby to powodować istnienie nowej makroskopowej siły związanej z jego wymianą. W szczególności sprzężenie aksjonu z nukleonami powodowałoby efektywne oddziaływanie nukleon-nukleon, które dodawałoby się do oddziaływania grawitacyjnego. Efekt ten może zostać zaobserwowany w doświadczeniach typu Cavendisha. Zakładając, że odstępstwo od prawa Newtona jest postaci Yukawy

$$V(r) = -\frac{G_N m_N^2}{r} (1 + \alpha e^{-m_a r}), \quad (5.6)$$

szukamy wkładu do parametru α . W powyższym wzorze m_N to masa nukleonu oraz $r \sim 1$ cm typowa skala odległości dla pomiarów stałej grawitacyjnej Newtona $G_N \approx 3,6 \cdot 10^{-38} \text{ GeV}^{-2}$. Istnienie skalarnego sprzężenia aksjonu do nukleonów dawałoby wkład

$$V_a(r) = -\frac{(g_{aNN}^s)^2}{4\pi} \frac{e^{-m_a r}}{r}, \quad (5.7)$$

gdzie g_{aNN}^s można wyznaczyć z konkretnego modelu, bądź posłużyć się podejściem efektywnym [35]. W tym drugim przypadku otrzymamy wynik w przybliżeniu niezależny od modelu

$$g_{aNN}^s \approx 7 \cdot 10^{-15} \bar{\theta} (10^{12} \text{ GeV} / f_a). \quad (5.8)$$

Jak wspomnieliśmy przy okazji rozważania mechanizmu Peccei-Quinn oddziaływania słabe wygenerują parametr $\bar{\theta}$ będący rzędu 10^{-17} . Oznacza to, że nie da się w ten sposób otrzymać

eksperymentalnego oszacowania na masę aksjonu z dołu, gdyż wkład ten nawet dla aksjonu bezmasowego byłby zbyt mały, by mógł być w najbliższej przyszłości zmierzony. Wyniesie on bowiem, co do rzędu wielkości,

$$\alpha_a \sim 10^7 (\bar{\theta})^2 (10^{12} \text{ GeV}/f_a)^2 \quad (5.9)$$

Zatem jak na razie jedyne dolne ograniczenie na masę aksjonu (lub innymi słowy górne na skalę f_a) daje kosmologia.

5.1.2. Astrofizyczne

Najbardziej restrykcyjne ograniczenia na parametry aksjonu wynikają z rozważań astrofizycznych. Opierają się one na potencjalnym wpływie aksjonów na ewolucję gwiazd. We wnętrzu gwiazdy temperatura jest na tyle wysoka, że aksjony mogą być produkowane na skutek oddziaływań z fotonami, elektronami, a w przypadku gwiazd neutronowych nawet nukleonami. Następnie z uwagi na ich bardzo słabe oddziaływanie z materią, mogłyby bez problemów uciekać na zewnątrz i tym samym stwarzać bardzo efektywny mechanizm chłodzenia, jednocześnie przyspieszając jej ewolucję (analogiczny, dobrze znany mechanizm występuje w przypadku neutrin). Tak więc ze znanych obserwacji astronomicznych można wyciągnąć wnioski co do możliwych ograniczeń na stałe sprzężenia aksjonu. Należy mieć jednak na uwadze, że zależą one silnie od naszego rozumienia procesów zachodzących w gwiazdach i nawet drobne zmiany modeli astrofizycznych mogą prowadzić do istotnie innych ograniczeń.

Słońce

Najlepiej znaną gwiazdą jest oczywiście nasze Słońce. Temperatura w jego wnętrzu wynosi około 10^7 K, natomiast gęstość około 100 g cm^{-3} . W takich warunkach najbardziej efektywnymi procesami produkcji aksjonów są proces Primakoffa i proces podobny do efektu Comptona, czyli $e + \gamma \rightarrow e + a$ (głównie dla aksjonu DFSZ, bo KSVZ dużo słabiej sprzęga się z elektronami). Okazuje się, że dla obydwu modeli wynika stąd podobne ograniczenie

$$\begin{aligned} m_a &< 2,7 \cdot (0,75/c_{a\gamma\gamma}) \text{ eV}, \\ f_a &> 2,3 \cdot 10^6 \cdot (c_{a\gamma\gamma}/0,75) \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Warto zauważyć, że te wnioski nie dotyczą aksjonu o masie większej niż około 10 keV, gdyż ze względu na temperaturę panującą w Słońcu (rzędu kilku keV) ich produkcja byłaby tłumiona.

Czerwone giganty

Temperatura rdzenia czerwonego giganta spalającego hel jest o rząd wielkości wyższa niż Słońca, natomiast gęstość sięga $10^4 \div 10^5 \text{ g cm}^{-3}$. Dla tych warunków dominującym procesem jest proces typu Comptona, toteż z ewolucji czerwonych gigantów nie otrzymuje się wartościowego ograniczenia na masę i skalę f_a aksjonu KSVZ. Co innego dla modelu DFSZ, dla którego można dostać

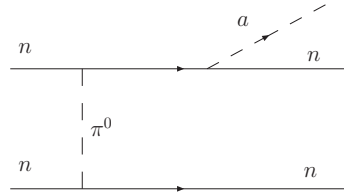
$$\begin{aligned} m_a &< 7 \cdot 10^{-2} \text{ eV}, \\ f_a &> 0,9 \cdot 10^8 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Oczywiście ograniczenie na sprzężenie do elektronów jest prawdziwe dla obydwu modeli (choć dla KSVZ mniej istotne) i wynosi

$$f_e < 0,9 \cdot 10^{-12}.$$

Gwiazdy neutronowe

W przypadku gwiazd neutronowych można otrzymać ograniczenie na sprzężenie do nukleonów. Jest ono o tyle ważne, że każdy model aksjonu musi oddziaływać z kwarkami i tym samym z nukleonami, natomiast teoretycznie można skonstruować modele sprzęgające aksjon do leptonów poprzez wielokrotne pętle (patrz uwagi przy omawianiu modeli niewidzialnego aksjonu w rozdziale 3). Przy temperaturach rzędu $10^8 \div 10^{10}$ K i gęstościach 10^{15} g cm⁻³ dominującym procesem produkcji aksjonów, dającym wkład do tego ograniczenia, jest reakcja przedstawiona na Rys. 5.1.



Rysunek 5.1: Diagram dla procesu aksjonowego promieniowania hamowania w zderzeniach neutronów.

Z tego procesu otrzymuje się dwa ograniczenia na sprzężenie aksjonu do nukleonów w zależności od tego, czy występuje nadciekłość nukleonów w takiej gwiazdzie czy też nie. Wynoszą one odpowiednio

$$f_n < 0,7 \cdot 10^{-10} \quad \text{lub} \quad f_n < 3,4 \cdot 10^{-12}.$$

Supernowa SN 1987A

Dosyć wartościowe ograniczenie wynika także z zaobserwowanego sygnału neutrin pochodzących z wybuchu supernowej SN 1987A [36]. Podobnie jak w przypadku gwiazd, istnienie aksjonów mogłoby spowodować istotne skrócenie tego sygnału. Różnica polega na tym, że we rdzeniu supernowej, tuż przed wybuchem, panuje tak wysoka temperatura i gęstość, że średnia droga swobodna nawet dla neutrin jest mniejsza od jego średnicy. W efekcie czas potrzebny na przedyfundowanie ich do powierzchni wynosi kilkanaście sekund. Co innego aksjony, które, o ile ich masa byłaby mniejsza od około 2 eV, mogłyby się wydostać dużo szybciej, gdyż ich oddziaływanie z nukleonami byłoby dużo słabsze niż dla neutrin. Z drugiej strony nie mogłyby też oddziaływać zbyt słabo, bo wtedy nie zostałyby wyprodukowane w wystarczającej liczbie by dać zauważalny efekt. Ten warunek pozwala *wykluczyć* aksjony o masie w przedziale

$$10^{-3} \text{ eV} \lesssim m_a \lesssim 2 \text{ eV}.$$

W połączeniu z poprzednimi ograniczeniami można zatem stwierdzić, że przynajmniej dla istniejących modeli niewidzialnego aksjonu, jego masa musi być być wystarczająco mała, tj.

$$m_a \lesssim 10^{-3} \text{ eV},$$

z jednym wyjątkiem. Dla modelu w którym oddziaływanie aksjonu z elektronami byłoby silnie tłumione, tak jak w przypadku KSVZ, występuje tzw. *okno aksjonu hadronowego* dla mas w okolicach kilku eV. Pozostawia to możliwość istnienia stosunkowo ciężkiego aksjonu, który byłby dobrym kandydatem na gorącą ciemną materię.

5.1.3. Kosmologiczne

Dla pełnego obrazu przytoczymy wyniki otrzymane w rozdziale 4 na ograniczenia wynikające z rozważań kosmologicznych. Mamy dwa scenariusze, zależne od modelu rozpadu strun

kosmicznych. Jeśli w scenariuszu rozpadu strun rację ma Davis, to otrzymamy

$$m_a \gtrsim 10^{-3} \text{ eV},$$

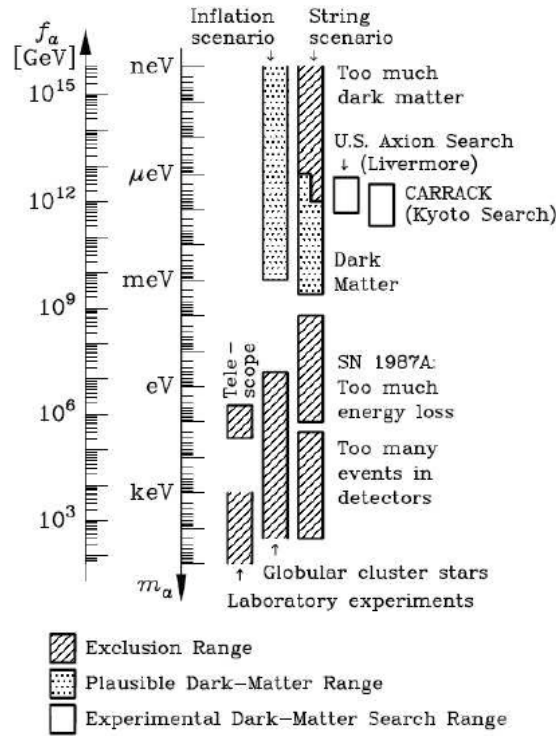
jeśli zaś rację mają Harari i Sikivie (bądź wystąpiła inflacja rozmywająca wszelkie defekty topologiczne), to ograniczenie będzie o wiele słabsze

$$m_a \gtrsim 10^{-5} \text{ eV}.$$

Dla modeli KSVZ i DFSZ (oraz wszystkich innych, w których masa aksjonu jest odwrotnie proporcjonalna do f_a i współczynnik proporcjonalności jest podobnego rzędu) można przetłumaczyć to na ograniczenie na skalę łamania symetrii PQ:

$$f_a \lesssim 10^{10} \text{ GeV} \quad \text{lub} \quad f_a \lesssim 10^{12} \text{ GeV}.$$

Porównanie istniejących ograniczeń na masę m_a i skalę łamania symetrii f_a (przy założeniu rozpatrywania jedynie znanych modeli niewidzialnego aksjonu) przedstawione są na Rys. 5.2.



Rysunek 5.2: Astrofizyczne, laboratoryjne i kosmologiczne ograniczenia na masę m_a i skalę f_a dla modeli KSVZ i DFSZ. Obszar zakreskowany odnosi się do parametrów wykluczonych przez eksperymenty, zakropkowany do tych, dla których aksjon mógłby formować ciemną materię, a pusty do wykluczonych przez eksperymenty szukające ciemnej materii. Dwa przypadki, inflacja i rozpad strun, odnoszą się do możliwych scenariuszy kosmologicznych. Rysunek z pracy [52].

5.2. Poszukiwania aksjonu

Oprócz istniejących wyników doświadczalnych, w niedalekiej przyszłości możemy spodziewać się nowych danych zwiększających ograniczenia opisane powyżej, bądź potwierdzające istnie-

nie aksjonu. W chwili obecnej wielu fizyków pracuje nad dalszymi poszukiwaniami, zarówno laboratoryjnymi jak i astrofizycznymi. W tym podrozdziale opiszemy od strony teoretycznej zasady działania i dotychczasowe wyniki takich doświadczeń.

5.2.1. Haloskopy

Najbardziej czuлыми ze wszystkich typów rozważanych eksperymentów są tzw. *haloskopy*. Zostały one zaproponowane przez Pierre'a Sikivie [37] w celu wykrycia aksjonów z halo naszej Galaktyki (skąd nazwa). W rozdziale 4 pokazaliśmy, że aksjony o odpowiedniej masie i skali łamania symetrii PQ byłyby wyprodukowane we wczesnym Wszechświecie i dziś, w znacznej części, tworzyłyby zimną ciemną materię. Taka ciemna materia byłaby skupiona w większości właśnie w halo, jej gęstość byłaby rzędu 10^{-24} g/cm³, a względne prędkości rzędu $10^{-3}c$.

Niestety haloskopy mają także swoje słabe strony. Po pierwsze, ich działanie opiera się na powyższym założeniu, tym samym ograniczone są jedynie do takiego zakresu parametrów aksjonu, który odpowiada istnieniu aksjonowej ciemnej materii. Po drugie, detektory tego typu są bardzo precyzyjnie dostrojone do niewielkich przedziałów mas aksjonu. Ponieważ nie mamy żadnych przewidywań co do jej wartości, należałoby wybudować wiele różnych detektorów, aby pokryć szeroki zakres mas.

Haloskop składa się z wnęki rezonansowej zanurzonej w silnym zewnętrznym polu magnetycznym skierowanym wzdłuż jej osi. Aksjon przelatujący przez taką wnękę może na skutek oddziaływania z fotonem pochodzącym z zewnętrznego pola zamienić się w pojedynczy foton (patrz rys. 5.3b). Energia takiego fotonu będzie w przybliżeniu równa masie spoczynkowej aksjonu z małym dodatkiem wynikającym z jego energii kinetycznej. Ponieważ dla aksjonu z halo $\beta \approx 10^{-3}$ to energia $E_a = m_a^2 c^2 + \frac{1}{2} m_a^2 c^2 \beta^2$ różni się od spoczynkowej o człon rzędu 10^{-6} . Tego samego rzędu będzie również rozrzut energii pomiędzy fotonami pochodzącymi od poszczególnych aksjonów.

Pozwala to użyć wnęki rezonansowej jako bardzo efektywnego detektora, o ile jej częstość rezonansowa ω będzie dostrojona do masy aksjonu. Przykładowo, jeśli masa aksjonu wynosiłaby $5 \mu\text{eV}$, czemu odpowiada częstotliwość 1,2 GHz, o rozrzucie jedynie o około 1,2 kHz. Jako detektor mogłaby posłużyć wtedy wnęka mikrofalowa.

Moc P jaką przekonwertowane aksjony wytworzą we wnęcie rezonansowej jest dana następującym wzorem [38]

$$P = \left(\frac{e^2}{32\pi^2} \frac{c_{a\gamma\gamma}}{f_a} \right)^2 B_0^2 V \rho_a \frac{1}{m_a} C_{lmn} \min(Q_L, Q_a), \quad (5.10)$$

gdzie B_0 wartość indukcji zewnętrznego pola magnetycznego, V objętość wnęki, ρ_a gęstość energii aksjonów z halo obecnych na Ziemi, Q_L dobroć wnęki¹, $Q_a = 1/\beta^2 = 10^6$ czynnik jakości sygnału aksjonowego, natomiast C_{lmn} to czynnik struktury dla poszczególnych modów TM_{lmn} , dany przez unormowaną całkę przekrycia zewnętrznego pola magnetycznego $\vec{B}_0(x)$ z oscylującym polem elektrycznym wybranego modu drgań wnęki $\vec{E}_\omega(x)e^{i\omega t}$,

$$C_{lmn} = \frac{\left| \int_V d^3x \vec{E}_\omega \cdot \vec{B}_0 \right|^2}{B_0^2 V \int_V d^3x \left| \vec{E}_\omega \right|^2}. \quad (5.11)$$

Dla wnęki cylindrycznej w jednorodnym polu magnetycznym największy wkład do czynnika struktury daje mod TM_{010} , $C_{010} = 0,69$ [39]. Sygnał otrzymany w takiej wnęcie będzie niesłychanie mały, rzędu 10^{-24} W, jednak możliwy do wykrycia przy odpowiednim kontrolowaniu szumów.

¹Z definicji jest to stosunek częstości rezonansowej do szerokości pasma przenoszenia.

Dla aksjonów mogących tworzyć zimną ciemną materię ich masa musi leżeć pomiędzy μeV i meV , co odpowiada przedziałowi częstości od 240 MHz do 240 GHz. Jednak aby utrzymać rezonans we wnęce jednocześnie można obserwować jedynie zakres o szerokości kilku kHz. Tak więc ważne jest by móc dostrajać wnękę do różnych częstotliwości. Dzisiejsze możliwości techniczne pozwalają dokonywać takich zmian do około 100 MHz.

Wykonano już kilka eksperymentów tego typu, a w planach są kolejne (przegląd można znaleźć w [38]). Pierwsze zostały wykonane w Brookhaven National Laboratory (BNL) i na Uniwersytecie Floryda w połowie lat 80-tych. Były to raczej eksperymenty pokazujące możliwość przeprowadzania takich pomiarów niż realne poszukiwania aksjonów, głównie ze względu na użycie bardzo małych wnęk. Ich czułość pozwoliła wykluczyć aksjony o masie w przedziale

$$4,5 \mu\text{eV} < m_a < 16,3 \mu\text{eV},$$

jednak jedynie dla stałej sprzężenia o około $10^2 \div 10^3$ razy większej niż przewidują modele niewidzialnego aksjonu. Na początku lat 90-tych ruszyła druga generacja eksperymentów w dwóch ośrodkach Lawrence Livermore National Laboratory (LLNL) w Stanach Zjednoczonych i w Kyoto w Japonii. Amerykański eksperyment o nazwie ADMX² użył cylindrycznej wnęki o średnicy 50 cm, długości 1 m, czynnika jakości około 210 i częstości rezonansowej 460 MHz. Układ umieszczony był w polu magnetycznym o wartości 8 T. Jak dotychczas, otrzymano czułość wystarczającą na wykluczenie aksjonu KSVZ w zakresie mas

$$1,9 \mu\text{eV} < m_a < 3,3 \mu\text{eV}.$$

W przypadku eksperymentu japońskiego CARRACK I do detekcji użyto wnęki wypełnionej gazem składającym się z atomów rydbergowskich, otrzymując w ten sposób detektor zliczający pojedyncze fotony, co pozwoliło na zbadanie obszaru w zakresie 8% dookoła $10 \mu\text{eV}$. W chwili obecnej trwają prace nad rozbudową tego eksperymentu do CARRACK II, który ma szukać aksjonu w przedziale mas $2 \mu\text{eV} < m_a < 50 \mu\text{eV}$.

5.2.2. Eksperymenty laserowe

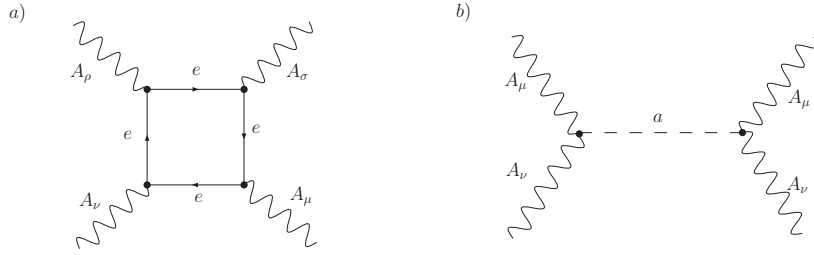
Eksperymenty tego typu opierają się na szukaniu śladu aksjonów w propagacji światła w polu magnetycznym. Rozważa się dwa rodzaje eksperymentów laserowych: precyzyjne pomiary polaryzacji światła w silnym polu magnetycznym oraz tzw. *regenerację fotonów* (zwaną też „świeceniem przez ścianę”). Z uwagi na bardzo podobne wymagania sprzętowe wobec układów doświadczalnych w obu tych eksperymentach, w praktyce można przeprowadzać obydwa w ramach jednego projektu.

Zacznijmy od rozważenia wpływu zewnętrznego pola magnetycznego na propagację światła w próżni. Posłużymy się lagranżjanem

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\alpha^2}{90m_e^4}[(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \frac{7}{4}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2], \quad (5.12)$$

opisującym fale elektromagnetyczne w próżni pod nieobecność zewnętrznych źródeł, gdzie do tensora pola włączyliśmy wkład od stałego zewnętrznego pola magnetycznego. Drugi człon w tym lagranżjanie to tzw. lagranżjan Eulera-Heisneberga, będący rozwinięciem lagranżjanu elektrodynamiki do wyższych potęg względem możliwych do skonstruowania z tensora pola skłarnych wielkości FF oraz $F\tilde{F}$. Opisuje on wzajemne oddziaływania fotonów przez pętlę elektronową (patrz rys. 5.3) w granicy, gdy energie fotonów są małe w porównaniu do masy elektronu m_e oraz wszystkie pola są małe w porównaniu do wartości krytycznej $B_{kr} = m_e^2/e$.

²Skrót od ang. Axion Dark Matter Search (poszukiwania aksjonowej ciemnej materii).



Rysunek 5.3: Diagramy Feynmana oddziaływań foton-foton a) poprzez pętlę elektronową, b) poprzez wymianę aksjonu.

To indukowane oddziaływanie przez pętlę elektronową powoduje istnienie dwójłomności próżni w ramach samej elektrodynamiki. Można się łatwo przekonać, znajdując równania ruchu wynikające z powyższego lagranżjanu, rozwijając je względem małych wartości pól i szukając rozwiązania w postaci fal płaskich, że otrzymamy różne wartości współczynnika załamania dla polaryzacji prostopadłej (\perp) i równoległej (\parallel) do zewnętrznego pola

$$n_{\perp} = 1 + \frac{4}{2} \frac{\alpha}{45\pi} \frac{B^2}{B_{kr}^2} \sin^2 \theta, \quad n_{\parallel} = 1 + \frac{7}{2} \frac{\alpha}{45\pi} \frac{B^2}{B_{kr}^2} \sin^2 \theta, \quad (5.13)$$

gdzie θ to kąt pomiędzy wektorem zewnętrznego pola magnetycznego, a wektorem pędu fotonu. Widzimy, że w obecności zewnętrznego pola \vec{B} próżnia staje się ośrodkiem wykazującym dwójłomność. Fakt ten sprawia, że liniowo spolaryzowane światło propagujące się w takich warunkach nabierze eliptyczności oraz dozna drobnej rotacji wektora polaryzacji (o ile na początku nie był on zgodny z zewnętrznym polem). Efekt jest oczywiście niezwykle mały i bardzo trudny do zmierzenia, jednak przy dzisiejszej technice osiągalny eksperymentalnie.

Jak na razie rozważaliśmy sytuację bez aksjonów. Jeśli jednak istnieją, to za sprawą ich oddziaływania z dwoma fotonami poprzez diagram przedstawiony na rysunku 5.3b dają dodatkowy wkład do wzajemnego oddziaływania fotonów. W zewnętrznym polu magnetycznym, gdzie jeden foton pochodzi z tego pola, może powodować to mieszanie fotonu z wiązki światła z aksjonem. Mieszanie to po pierwsze zwiększa dwójłomność próżni, przyczyniając się do zwiększenia efektów zmiany polaryzacji, po drugie daje możliwość przeprowadzenia eksperymentu z regeneracją fotonów. Zanim przejdziemy do omówienia tych dwóch możliwości wykrycia aksjonu, opiszmy równania ruchu w takim układzie.

Lagranżjan przyjmuje postać

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_{\mu} a \partial^{\mu} a - \frac{1}{2} m_a^2 a^2 + \frac{a}{4M} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{\alpha^2}{90m_e^4} [(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 + \frac{7}{4} (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})^2], \quad (5.14)$$

gdzie dla wygody wyraziliśmy sprzężenie aksjonu do dwóch fotonów przez stałą wymiarową M , daną zależnością $\frac{1}{4M} = \frac{\alpha}{4\pi} c_{a\gamma\gamma} \frac{1}{f_a}$.

Stacjonarne równania ruchu dla fotonów propagujących się wzdłuż osi z przyjmują wtedy następującą postać

$$\left(\omega^2 + \partial_z^2 + \begin{bmatrix} Q_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{\parallel} & B\omega/M \\ 0 & B\omega/M & -m_a^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} A_{\perp} \\ A_{\parallel} \\ a \end{bmatrix} = 0, \quad (5.15)$$

gdzie w próżni $Q_i = 2\omega^2(n_i - 1)$, natomiast współczynniki załamania dane są przez (5.13) Założyliśmy, że pole zewnętrzne \vec{B} jest prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali (czyli

$\theta = \frac{\pi}{2}$) i jest wolnozmienną funkcją współrzędnych przestrzennych. W takim przypadku możemy też skorzystać z rozwinięcia (dla propagacji w kierunku zgodnym z osią z)

$$\omega^2 + \partial_z^2 = (\omega + i\partial_z)(\omega - i\partial_z) = (\omega + k)(\omega - i\partial_z). \quad (5.16)$$

Wyrażając relację dyspersyjną w postaci $k = n\omega$ i zauważając, że w naszym przypadku (patrz równanie (5.13)) mamy $|n - 1| \ll 1$, możemy przybliżyć $\omega + k \approx 2\omega$. Po tych operacjach z łatwością otrzymujemy zlinearyzowaną postać równań ruchu:

$$\left(\omega - \partial_z + \begin{bmatrix} \Delta_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{\parallel} & \Delta_M \\ 0 & \Delta_M & \Delta_a \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} A_{\perp} \\ A_{\parallel} \\ a \end{bmatrix} = 0, \quad (5.17)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia

$$\Delta_{\perp} := \frac{4}{2} \frac{\alpha}{45\pi} \frac{B^2}{B_{kr}^2} \sin^2 \theta, \quad \Delta_{\parallel} := \frac{7}{2} \frac{\alpha}{45\pi} \frac{B^2}{B_{kr}^2} \sin^2 \theta, \quad \Delta_a := -\frac{m_a^2}{2\omega}. \quad (5.18)$$

Fizycznie wielkości te odpowiadają różnicom pomiędzy pędami poszczególnych modów w porównaniu do sytuacji w próżni bez zewnętrznego pola, $\Delta_i = k_i - \omega$. Element pozadiagonalny wynosi zaś ogólnie

$$\Delta_M := \frac{B}{2M} \sin \theta, \quad (5.19)$$

co w naszym przypadku ($\theta = \frac{\pi}{2}$) daje po prostu $\Delta_M = \frac{B}{2M}$. Równanie ruchu (5.17) można zdiagonalizować stosując obrót

$$\begin{bmatrix} A'_{\parallel} \\ a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\parallel} \\ a \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Jak można się łatwo przekonać z równania (5.17), mieszanie pomiędzy składową pola równoległą do \vec{B} , a aksjonem można scharakteryzować przez stosunek wyrazu pozadiagonalnego do różnicy wyrazów diagonalnych, tj.

$$\frac{1}{2} \tan 2\varphi = \frac{\Delta_M}{\Delta_{\parallel} - \Delta_a}. \quad (5.21)$$

W przypadku³ gdy mieszanie jest bardzo małe ($\varphi \ll 1$), czyli gdy zewnętrzne pole jest wystarczająco słabe, możemy przybliżyć $\frac{1}{2} \tan 2\varphi \approx \varphi$.

Rozważmy teraz wiązkę laserową o częstości ω propagującą się w kierunku z . Pomijając wspólną fazę dla obu polaryzacji, będącą postaci $e^{i(\omega t - (\omega + \Delta_{\parallel})z)}$, z (5.17) otrzymujemy równanie dla składowej prostopadłej

$$A_{\perp}(z) = e^{-i(\Delta_{\perp} - \Delta_{\parallel})z} A_{\perp}(0). \quad (5.22)$$

Dla składowej równoległej oraz dla pola aksjonu otrzymamy natomiast

$$\begin{bmatrix} A_{\parallel}(z) \\ a(z) \end{bmatrix} = \mathcal{M}(z) \begin{bmatrix} A_{\parallel}(0) \\ a(0) \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

³Ściśle rzecz ujmując jest to prawdziwe w próżni, gdzie $\Delta_{\parallel} \neq \Delta_a$. W rzeczywistym przypadku, choćby szcążkowa obecność gazu dla bardzo małych mas aksjonu może spowodować $\Delta_{\parallel} = \Delta_a$ i przybliżenie słabego mieszania się załamuje. Efekt ten dotyczy jednak aksjonów prawie bezmasowych, więc nie ma większego znaczenia dla żadnych konkretnych modeli.

gdzie macierz przejścia otrzymujemy przez znalezienie ewolucji dla pól primowanych i obłożenie otrzymanej macierzy z obu stron przez macierze obrotu pomiędzy polami primowanymi, a wyjściowymi:

$$\mathcal{M}(z) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i(\Delta'_{\parallel} - \Delta_{\parallel})z} & 0 \\ 0 & e^{-i(\Delta'_a - \Delta_{\parallel})z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Teraz możemy już przejść do poszczególnych typów eksperymentów laboratoryjnych.

Dwójłomność próżni

Eksperyment tego typu opiera się na niezwykle dokładnych pomiarach zmiany polaryzacji światła laserowego przechodzącego przez obszar o silnym stałym polu magnetycznym. Jak już wspomnieliśmy wcześniej, obecność pola magnetycznego sprawia, że próżnia staje się ośrodkiem dwójłomnym. Pod nieobecność aksjonów, przesunięcie w fazie ϕ pomiędzy składowymi A_{\perp} i A_{\parallel} jest dane po prostu przez równanie (5.22), jako że składowa równoległa do pola w ogóle nie wyczuwa jego obecności. Tak więc z równań (5.18) otrzymamy

$$\phi_{\text{QED}}(z) = \frac{2\alpha^2 B^2}{15m_e^4} \omega z. \quad (5.25)$$

Ponieważ idealna próżnia nie istnieje, zarówno w sytuacji laboratoryjnej jak i w rozważaniach astrofizycznych, należy jeszcze uwzględnić efekt dodatkowej zmiany fazy wywołany obecnością bardzo rozrzedzonego gazu. Opisuje to tzw. *zjawisko Cottona-Moutona* i daje wkład postaci

$$\phi_{\text{CM}}(z) = 2\pi C B^2 z, \quad (5.26)$$

gdzie C jest pewnym współczynnikiem charakteryzującym ośrodek, zależnym od ciśnienia. Przykładowo, dla powietrza w warunkach normalnych przyjmuje on w przybliżeniu wartość $C_{\text{pow}} \approx 1,13 \cdot 10^{-6} \text{ rad T}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

W przypadku istnienia aksjonów przesunięcie w fazie ϕ otrzyma dodatkowy wkład ϕ_a , wynikający z mieszania fotonu z aksjonem. Można się łatwo przekonać patrząc na równania ruchu, że (zakładając $a(0) = 0$) wkład ten pojawi się z części urojonej górnego elementu diagonalnego macierzy \mathcal{M} . W przybliżeniu słabego mieszania aksjonu z fotonem mamy

$$\phi_a(z) = -\text{Im } \mathcal{M}_{(11)} = \varphi^2 ((\Delta_{\parallel} - \Delta_a)z - \sin(\Delta_{\parallel} - \Delta_a)z). \quad (5.27)$$

Całkowita zmiana fazy wyniesie więc $\phi = \phi_{\text{QED}} + \phi_{\text{CM}} + \phi_a$. W warunkach doświadczalnych da się otrzymać $\phi_{\text{QED}} \gg \phi_{\text{CM}}$, zatem jeśli tylko wkład od aksjonu będzie podobnego rzędu co efekt czystej QED, będzie on możliwy do wychwycenia przy pomiarze eliptyczności polaryzacji światła laserowego propagującego się w polu magnetycznym. Efekt ten został po raz pierwszy zaproponowany do wykrycia aksjonów przez Maiani'ego, Petronzio i Zavattini'ego [40].

Oprócz narastającej eliptyczności, istnienie aksjonów spowodowałoby rotację wektora polaryzacji, gdyż element $\mathcal{M}_{(11)}$ ma też część rzeczywistą odrobinę mniejszą od jedności

$$\epsilon(z) = 1 - \text{Re } \mathcal{M}_{(11)} = 2\varphi^2 \sin^2 \frac{(\Delta_{\parallel} - \Delta_a)z}{2}. \quad (5.28)$$

Oznacza to, że składowa A_{\parallel} w miarę propagacji będzie zmniejszana o czynnik $1 - \epsilon(z)$ na skutek zamiany fotonów na aksjony. Jeśli z początku wektor polaryzacji wiązki będzie nachylony pod kątem 45° do wektora \vec{B} , to dozna on rotacji o kąt $\epsilon(z)/2$.

Jak widzimy efekty te są tym większe, im większa długość obszaru w którym światło propaguje się w polu magnetycznym. Z oczywistych względów praktycznych, zwiększenie tej długości najefektywniej można otrzymać poprzez odbijanie światła tam i z powrotem wewnątrz magnesu. Oznaczmy liczbę odbić przez N , a odległość pomiędzy lustrami (długość magnesu) l , tak że całkowita droga wiązki laserowej wewnątrz pola magnetycznego to $L = Nl$. Otrzymamy wtedy efekt zwiększony N -krotnie, tj. $\phi(L) = N\phi(l)$. W przypadku propagacji koherentnej aksjonu i fotonu, czyli w sytuacji, gdy $(\Delta_{||} - \Delta_a)l \ll 1$, możemy rozwinąć (5.27) i (5.28), po czym podstawiając pod z długość l i korzystając z (5.21) otrzymamy

$$\phi_a(L) = N \frac{B^2 m_a^2}{48\omega M^2} l^3, \quad \epsilon(L) = N \frac{B^2}{8M^2} l^2. \quad (5.29)$$

Jak do tej pory przeprowadzono dwa eksperymenty tego typu, jednak żaden z nich nie osiągnął czułości porównywalnej z ograniczeniami wynikającymi z obserwacji astrofizycznych, nie mówiąc już o wystarczającej do zbadania obszaru parametrów aksjonu przewidywanych przez istniejące modele. Pierwszy z nich to eksperyment BFRT⁴, przeprowadzony na początku lat 90-tych. Ta sama grupa badawcza wykonała najpierw eksperyment polegający na regeneracji fotonów, którego ideę omówimy w następnym paragrafie. Zbiorcze wyniki obu eksperymentów zostały opublikowane w pracy [41]. Do pomiarów polaryzacji użyto magnesu o $B = 2$ T i $l = 8,8$ m, światła laserowego o średniej mocy $P_L = 3$ W i częstotliwości $\omega = 2,4$ eV oraz wnęki rezonansowej pozwalającej otrzymać $N = 254$ (w przypadku regeneracji fotonów otrzymano $N = 200$ i użyto silniejszego magnesu o $B = 3,7$ T, jednak tutaj $l = 4,4$ m, czyli wynosiła jedynie połowę długości, gdyż charakter tego eksperymentu wymaga podzielenia magnesu na dwie części). Oba te eksperymenty nie uzyskały żadnego sygnału, tym samym ustanawiając ograniczenie na sprzężenie aksjonu do fotonów rzędu (używamy tu zamiennie oznaczenia $g_{a\gamma\gamma} = 1/M$)

$$g_{a\gamma\gamma} < 4 \cdot 10^{-7} \text{ GeV}^{-1} \quad \text{dla mas} \quad m_a < 7 \cdot 10^{-4} \text{ eV}.$$

Pełne ograniczenia na przestrzeni istotnych parametrów aksjonu (dla eksperymentów laserowych są to jedynie $g_{a\gamma\gamma}$ i m_a) dla obu tych eksperymentów widać na rysunku 5.4.

W zeszłym roku włoska grupa z kilku ośrodków naukowych przeprowadziła eksperyment tego typu o nazwie PVLAS⁵. Parametry układu to magnes o $B = 5$ T i $l = 1$ m, światło laserowe o częstotliwości $\omega = 1,2$ eV oraz wnęki rezonansowej pozwalająca otrzymać $N = 44\,000$, które w efekcie dają podobny zakres badanych parametrów co BFRT. Podobny, lecz nie identyczny, co stanowi istotny punkt w świetle faktu, iż PVLAS otrzymał pozytywny sygnał! W chwili obecnej sporo dyskutuje się na temat interpretacji cząstkowej tego sygnału, jednak nawet jeśli w istocie PVLAS wykrył nową fizykę, a nie był to jedynie artefakt aparatury pomiarowej, to bardzo wątpliwe jest, by rzeczywiście znalazł aksjon. Aksjon taki nie byłby bowiem zgodny z żadnym istniejącym modelem oraz na dodatek sprzeczny z ograniczeniami astrofizycznymi. Mając na uwadze te wątpliwości zaznaczmy, że okno dla możliwej wykrytej cząstki wynikające z sygnału PVLAS i jego braku przy BFRT ma postać

$$1,7 \cdot 10^{-7} \text{ GeV}^{-1} < g_{a\gamma\gamma} < 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ GeV}^{-1}$$

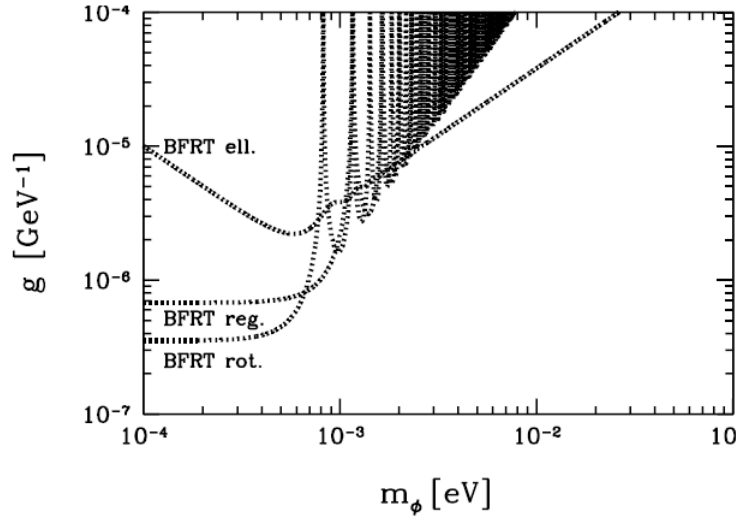
dla mas

$$1,0 \cdot 10^{-3} \text{ eV} < m_a < 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ eV}.$$

W chwili obecnej w fazie testów jest nowy eksperyment OSQAR w CERN-ie, którego omówieniu poświęcony jest rozdział 6.

⁴Skrót pochodzi od nazw czterech ośrodków Brookhaven, Fermilab, Rochester i Trieste.

⁵Z języka włoskiego „Polarizzazione del Vuoto con Laser” (polaryzacja próżni za pomocą lasera).



Rysunek 5.4: Oryginalne wyniki eksperymentu BFRT: *ell* oznacza wynik z badania eliptyczności, *rot* rotacji, a *reg* z eksperymentu z regeneracją fotonów.

Regeneracja fotonów

W eksperymencie typu „świecenie parzez ścianę” [42] korzystamy z faktu, iż aksjon bardzo słabo oddziałuje z materią. W praktyce oznacza to między innymi, że bariera optyczna całkowicie pochłaniająca światło, wcale nie stanowi bariery dla aksjonów i może być traktowana jako filtr, który z mieszanego stanu aksjonów i fotonów przepuszcza tylko te pierwsze. Schemat układu do tego doświadczenia przedstawiony jest na rysunku 5.5. Jeśli aksjony istnieją,



Rysunek 5.5: Uproszczony schemat eksperymentu z regeneracją fotonów.

to foton propagujący się w polu magnetycznym ze stanu czystego przechodzi w stan mieszany aksjonu z fotonem. W momencie natrafienia na barierę optyczną (ścianę) następuje redukcja do stanu czystego i z niezerowym prawdopodobieństwem pojawia się aksjon, który swobodnie przelatuje dalej. Następnie po drugiej stronie bariery znów napotyka silne pole magnetyczne, co z powrotem powoduje pojawienie się mieszania z fotonem. Na końcu tego obszaru umieszczamy detektor fotonów, który ponownie powoduje redukcję stanu i tym razem z niezerowym prawdopodobieństwem otrzymujemy foton, który rejestrujemy. Jeżeli natomiast aksjony nie istnieją, to nie otrzymamy żadnego sygnału. Widzimy więc, że jest to bardzo bezpośrednia i prosta metoda, jedynym problemem jest niezwykle małe prawdopodobieństwo konwersji

aksjonu w foton i na odwrót.

Prawdopodobieństwo to można odczytać z mieszania składowej A_{\parallel} z aksjonem, danego macierzą \mathcal{M} w równaniu (5.24). Widzimy, że dane jest ono przez kwadrat modułu jej składowej pozadiagonalnej, czyli

$$p(\gamma \rightarrow a) = \left| \mathcal{M}_{(12)} \right|^2 = 4\varphi^2 \sin^2 \frac{(\Delta_{\parallel} - \Delta_a)z}{2}. \quad (5.30)$$

Korzystając z (5.21), definicji Δ_M , Δ_{\parallel} i Δ_a oraz przyjmując długość obszaru propagacji przed i za magnesem jako l , możemy powyższy wzór wyrazić w bardziej przyjaznej postaci

$$p(\gamma \rightarrow a) = \frac{B^2 L^2}{4M^2} \left(\frac{\sin(qL/2)}{qL/2} \right)^2, \quad (5.31)$$

gdzie oznaczyliśmy $q = (\Delta_{\parallel} - \Delta_a)$, co ma interpretację fizyczną różnicy pędu pomiędzy aksjonem a fotonem (jako że można łatwo policzyć, iż $q = \omega - \sqrt{\omega^2 - m_a^2}$). Tak więc jeśli na całej długości L zachodzi propagacja koherentna, czyli $qL \ll 1$ otrzymujemy prosty wzór

$$p(\gamma \rightarrow a) = \frac{B^2 L^2}{4M^2}. \quad (5.32)$$

Liczba zliczeń w detektorze zależy od kwadratu tego prawdopodobieństwa (muszą nastąpić dwie konwersje, wpiery z fotonu w aksjon, a później z powrotem w foton), liczby fotonów w wiązce (mocy optycznej P_L podzielonej przez ich częstość ω), sprawności detektora η oraz liczby odbić pomiędzy lustrami umieszczonymi w magnesie (podzielonej przez czynnik 2, gdyż rejestrujemy tylko fotony powstałe z aksjonów propagujących się w jedną stronę). Ostatecznie liczba zliczeń CR dana jest wyrażeniem

$$CR = \eta \frac{P_L N}{\omega} \frac{1}{2} p^2(\gamma \rightarrow a) = \eta \frac{P_L N}{\omega} \frac{B^4 L^4}{16M^4} \left(\frac{\sin(qL/2)}{qL/2} \right)^4. \quad (5.33)$$

Wstawiając charakterystyczne skale liczbowe wygląda to następująco

$$CR = 4.07 \cdot 10^{10} \frac{\text{GeV}^4}{\text{s}} \left(\frac{\eta}{0.9} \cdot \frac{P_L}{1 \text{ W}} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{\omega} \cdot \frac{N}{1000} \right) \left(\frac{B}{10 \text{ T}} \right)^4 \left(\frac{g}{10^{-6} \text{ GeV}^{-1}} \right)^4 \frac{\sin^4(qL/2)}{q^4}. \quad (5.34)$$

Warto poczynić na koniec jeszcze jedną uwagę. Dotychczas rozważaliśmy jedynie jednorodne zewnętrzne pola magnetyczne. Analizę równań ruchu można bez większego trudu rozszerzyć na pola zmienne i rozważać rozwiązanie pierwszego rzędu w zaburzeniu powodowanym przez istnienie członów pozadiagonalnych w równaniach ruchu (szczegóły można znaleźć w pracy [43]). Otrzymamy wtedy prawdopodobieństwo w postaci

$$p(\gamma \rightarrow a) = \left| \int_0^z dz' \Delta_M(z') \exp(i\Delta_a(z')z' - i \int_0^{z'} dz'' \Delta_{\parallel}(z'')) \right|^2. \quad (5.35)$$

Jest to ważny punkt, jeśli rozważa się drobne zmiany układu doświadczalnego, by móc zbadac jak najszerszy obszar parametrów aksjonu (jak np. zastosowanie wielu magnesów o alternującej polaryzacji). Nie powoduje jednak istotnej różnicy przy układach opartych jedynie na tym co zostało opisane powyżej (aczkolwiek jest ona zauważalna i wszelkie dokładniejsze wyliczenia powinny uwzględniać fakt niejednorodności pola).

Do chwili obecnej przeprowadzono jedynie jeden eksperyment tego typu przez kolaborację BFRT, którego wyniki omówiliśmy wcześniej. Jednak zainteresowanie takimi pomiarami

wzrosło po publikacji wyników PVLAS, jako że regeneracja fotonów daje dużo bardziej klarowną odpowiedź na pytanie o ich interpretację aksjonową (czy ogólniej mówiąc, interpretację zakładającą istnienie lekkich cząstek pseudoskalarnych oddziałujących z dwoma fotonami). Planowane są w najbliższym czasie trzy eksperymenty: rozszerzenie PVLAS o regenerację fotonów, nowy eksperyment w DESY [44] oraz opisany w następnym rozdziale OSQAR.

5.2.3. Obserwacje astrofizyczne

Podstawowym obiektem, którego obserwacje pozwalają na poszukiwanie aksjonów jest Słońce. Metodami astronomicznymi można jednak szukać aksjonów również w odległych galaktykach posługując się zwykłymi teleskopami. Eksperymenty tego typu nastawione są na poszukiwanie aksjonów o znacznie większej masie, rzędu kilku eV, gdyż wtedy mogą się one rozpaść na fotony dając zauważalny efekt. Warto zauważyć, że choć obszar ten dla znanych modeli został już wykluczony przez istniejące ograniczenia eksperymentalne, to w zasadzie nie wyklucza to istnienia aksjonu opisywanego przez jakiś inny, jak dotąd nie zaproponowany model. Eksperyment przeprowadzony w Kitt Peak National Observatory [45] wykluczył obszar mas

$$3 \text{ eV} < m_a < 8 \text{ eV}.$$

Detektory szukające aksjonów pochodzących ze Słońca określa się mianem *helioskopów*. Zgodnie z aktualnie obowiązującym modelem Słońca [46] można policzyć całkowity strumień aksjonów w nim wyprodukowanych które dotrą na Ziemię na jednostkę powierzchni i jednostkę czasu

$$\Psi_a = 3,75 \cdot 10^{11} \left(\frac{g_{a\gamma\gamma}}{10^{-10} \text{ GeV}^{-1}} \right)^2 \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-1}. \quad (5.36)$$

Ich energia jest rzędu kilku keV, tak więc w przeciwieństwie do aksjonów galaktycznych są cząstki relatywistyczne. Ich próby wykrycia w helioskopach opierają się podobnie jak w przypadku eksperymentów laserowych z regeneracją fotonów na konwersji aksjonów na fotony w silnym polu magnetycznym, bądź na wykorzystaniu pola elektrycznego (np. w detektorach krystalicznych, w których przelatujący aksjon pozostawia charakterystyczny ślad). Ten drugi sposób został wykorzystany przy okazji dużych eksperymentów poszukujących ciemnej materii, co dało następujące ograniczenia:

- Eksperyment SOLAX⁶ [47] korzystając ze spektrometru germanowego otrzymał

$$g_{a\gamma\gamma} < 2,7 \cdot 10^{-9} \text{ GeV}^{-1},$$

dla mas mniejszych od 1 keV.

- Detektor COSME w Canfranc Underground Laboratory [48], będący również detektorem germanowym, uzyskał podobny wynik

$$g_{a\gamma\gamma} < 2,78 \cdot 10^{-9} \text{ GeV}^{-1},$$

niezależny od masy aksjonu, jednak silnie polegający na modelu Słońca.

- Eksperyment DAMA⁷ [49] uzyskał natomiast

$$g_{a\gamma\gamma} < 1,7 \cdot 10^{-9} \text{ GeV}^{-1},$$

dla mas w zakresie około 1 eV.

⁶Skrót od ang. SOLar AXion search in Argentina (poszukiwania aksjonów słonecznych w Argentynie).

⁷Skrót od ang. DArk MAtter (ciemna materia).

Okazało się jednak, że tego typu podejście korzystające z pola elektrycznego jest mocno ograniczone i nie może konkurować z pierwszym typem helioskopów. Pionierski eksperyment tego typu został przeprowadzony przez Lazarusa i współpracowników [50], dając wyniki dla dwóch obszarów mas

$$g_{a\gamma\gamma} < 3,6 \cdot 10^{-9} \text{ GeV}^{-1} \quad \text{dla} \quad m_a < 0,03 \text{ eV}$$

oraz

$$g_{a\gamma\gamma} < 7,7 \cdot 10^{-9} \text{ GeV}^{-1} \quad \text{dla} \quad 0,03 \text{ eV} < m_a < 0,11 \text{ eV}.$$

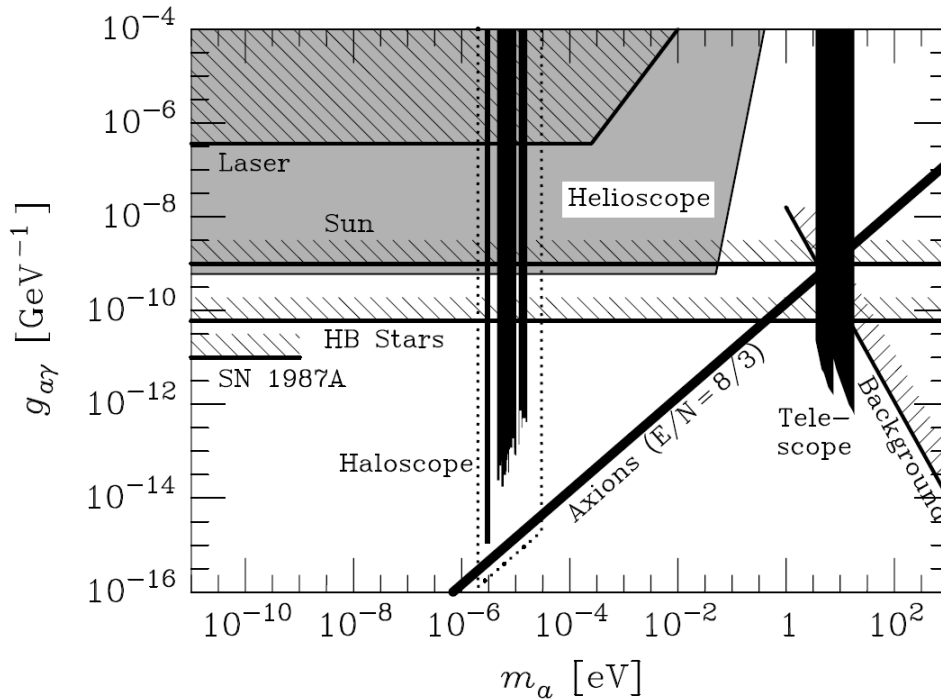
Następnie przeprowadzono eksperyment w Tokyo [51], działający na tej samej zasadzie lecz o większej czułości, co doprowadziło do ograniczenia

$$g_{a\gamma\gamma} < 6,0 \cdot 10^{-10} \text{ GeV}^{-1} \quad \text{dla} \quad m_a < 0,03 \text{ eV}.$$

W chwili obecnej działa największy z eksperymentów tego typu, CAST⁸ w CERN-ie, korzystający z identycznego magnesu dipolowego dla LHC, jaki ma być wykorzystany w eksperymencie OSQAR. Dotychczasowe wyniki z pomiarów z roku 2003 dają ograniczenie

$$g_{a\gamma\gamma} < 1,16 \cdot 10^{-10} \text{ GeV}^{-1} \quad \text{dla} \quad m_a < 0,02 \text{ eV}.$$

Porównanie ograniczeń wynikających z różnych obserwacji astrofizycznych, a także niektórych eksperymentów można znaleźć na rysunku 5.6.



Rysunek 5.6: Porównanie ograniczeń eksperymentalnych na parametry aksjonu wynikających z różnych eksperymentów: laserowych i helioskopów, teleskopów, a także obserwacji astrofizycznych Słońca i gwiazd z gałęzi horzontalnej (HB) oraz supernowej SN 1987A. Linia ukośna odwzorowuje obszar dla przewidywany przez modele KSVZ i DFSZ. Rysunek z pracy [52].

⁸Skród od ang. CERN Axion Solar Telescope.

Rozdział 6

OSQAR

OSQAR (ang. „Optical Search for QED vacuum magnetic birefringence, Axions and photon Regeneration”¹) to nowy projekt badawczy, którego propozycja została złożona do komitetu SPSC w Europejskim Ośrodku Badań Jądrowych (CERN) [7]. W skład grupy badawczej wchodzi fizycy z ośmiu ośrodków z czterech krajów europejskich, w tym z Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Rozpoczęcie eksperymentu planowane jest na jesień 2007 roku. W chwili obecnej trwają prace nad przygotowaniem układu doświadczalnego, testami sprzętu oraz wykonywane są wstępne pomiary kalibrujące. W ramach projektu OSQAR wykonane zostaną dwa doświadczenia: precyzyjne pomiary polaryzacji próżni oraz eksperyment z regeneracją fotonów. Celem jest zbadanie metodami laboratoryjnymi jak dotychczas największego obszaru parametrów aksjonu, potwierdzenie przewidywań elektrodynamiki kwantowej w zakresie magnetycznej dwójłomności próżni na poziomie² 10^{-22} , a także zweryfikowanie wyników eksperymentu PVLAS czy poszukiwanie okien nowej fizyki poprzez nakładanie ograniczeń na fermiony o ułamkowym ładunku (patrz np. [53]).

W tym rozdziale przedstawimy plan eksperymentu i układ doświadczalny oraz przewidywania teoretyczne co do jego wyników. Omówimy także różne możliwe planowne modyfikacje mające na celu zwiększenie czułości w dalszych fazach działania eksperymentu.

6.1. Plan eksperymentu

Od strony teoretycznej planowane doświadczenia zostały już opisane w rozdziale 5 w części poświęconej eksperymentom laserowym. Wyprowadziliśmy tam wyrażenia na eliptyczność oraz rotację polaryzacji wiązki laserowej dla pomiarów dwójłomności próżni oraz liczbę zliczeń detektora w przypadku regeneracji fotonów w zależności od masy aksjonu i stałej f_a . Pozostaje jedynie skoncentrować się na charakterystyce samego układu doświadczalnego.

Podstawowym urządzeniem niezbędnym w obu tych doświadczeniach jest magnes. W obydwu przypadkach niezwykle ważne jest by uzyskać jak największe pole magnetyczne na jak największej długości. Dlatego świetnym rozwiązaniem wydaje się być skorzystanie z nadprzewodzących magnesów dipolowych zbudowanych na potrzeby LHC. W CERN-ie do dyspozycji będzie kilka takich magnesów w ciągu całego czasu działania akceleratora LHC, co więcej dwa z nich będą na stałe podłączone do kriostatu, by w razie jakiegokolwiek awarii akceleratora

¹ „Optyczne poszukiwania magnetycznej dwójłomności próżni w elektrodynamice kwantowej oraz aksjonów poprzez regenerację fotonów”.

²W przypadku tzw. eksperymentów $n - 1$ można osiągnąć taką dokładność rozważając jedynie poprawki dwupętłowe, co znacznie upraszcza teoretyczne rachunki w porównaniu z ośmiopętłowymi poprawkami przy eksperymentach typu $g - 2$.

móc szybko wykonać niezbędne testy. Będziemy zatem mieli do dyspozycji na pewno jeden, a może nawet i kilka takich magnesów, każdy o długości $L = 14,3$ m i maksymalnym polu magnetycznym $B_{\max} = 9,76$ T przy temperaturze pracy $1,9$ K. Średnica cewki wynosi 56 mm więc jest wystarczająco duża by zmieścić w środku detektor, a w przypadku regeneracji fotonów wnękę rezonansową. Przekrój poprzeczny i schemat magnesu podłączonego do ławy przedstawiliśmy na rysunkach 6.1 oraz 6.2. Porównanie parametrów tego magnesu z magnesami użytymi w poprzednich eksperymentach widać w tabeli 6.1. Oprócz wartości B_{\max} i L , przedstawiliśmy jeszcze $B_{\max}^2 L^2$ i $B_{\max}^2 L^3$, gdyż jak widać ze wzorów (5.29) i (5.33) to te kombinacje występują we wzorach końcowych.

	B_{\max}	L	$B_{\max}^2 L^2$	$B_{\max}^2 L^3$
BFRT	3,7	8,8	1 060	9 330
PVLAS	5	1	25	25
OSQAR	9,7	14,3	19 240	275 140

Tablica 6.1: Porównanie parametrów magnesu z poprzednimi eksperymentami (wartości w jednostkach SI).

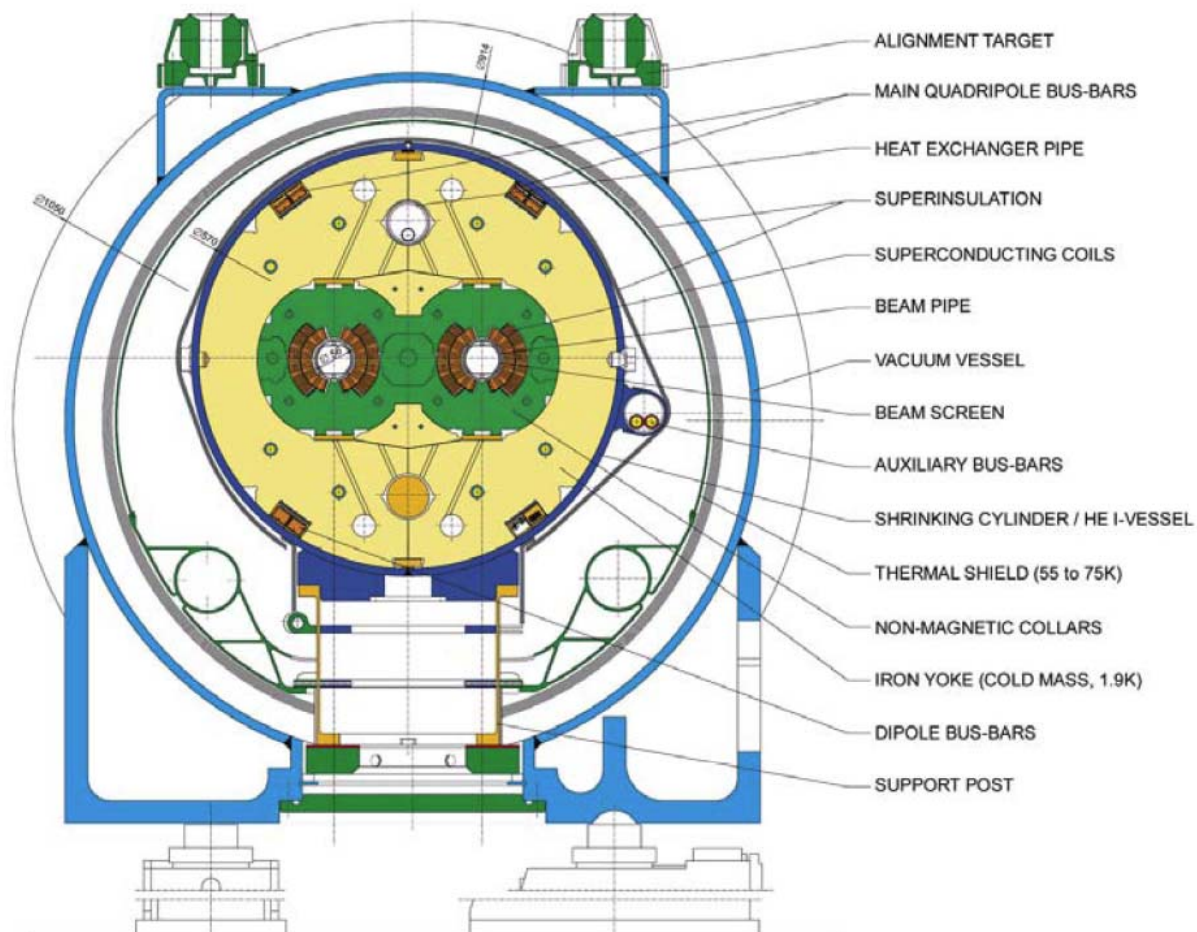
Warto zaznaczyć, że czułość eksperymentu PVLAS dużo zyskuje dzięki użyciu wnęki rezonansowej o dobroci (liczbie dobić) $N = 10^4 \div 10^5$ i dlatego jest porównywalna z wynikami BFRT, choć parametry samego magnesu sugerują, że powinna być o wiele niższa. Jednak jeśli patrzeć na sam magnes to już na pierwszy rzut oka widać, że porównanie istotnie wskazuje na przewagę dipolowego magnesu dla LHC nad tymi używanymi w poprzednich eksperymentach, co daje nadzieję na uzyskanie o wiele wyższej czułości.

Pozostałe części układu są inne dla pomiarów polaryzacyjnych, a inne dla regeneracji fotonów, dlatego omówimy je osobno.

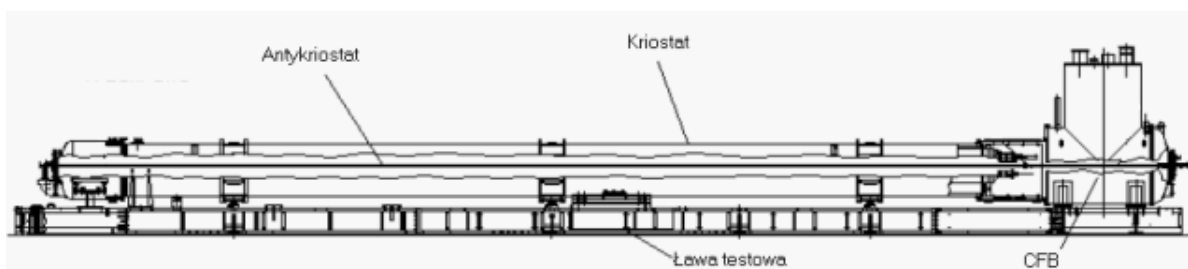
6.1.1. Dwójłomność próżni

Ta część projektu rozplanowana jest na dwie fazy. Celem pierwszej będzie osiągnięcie dokładności potrzebnej do zweryfikowania QED na poziomie pierwszej poprawki pętlowej. Posłuży do tego układ, którego uproszczony schemat przedstawiliśmy na rysunku 6.3. Dokładniejszy opis wraz ze szczegółami technicznymi można znaleźć w projekcie [7] i zawartych tam odnośnikach.

Aby otrzymać jak najdłuższą drogę wiązki laserowej w polu magnetycznym użyta zostanie wnęką rezonansowa (dla przejrzystości nie przedstawiona na schemacie) o maksymalnej $N = 10^3 \div 10^4$. Takie rozwiązanie ma jednak dosyć istotną wadę, przejawiającą się w narastaniu błędów systematycznych związanych z niedokładnością luster. W szczególności efekt wynikający z jakiegokolwiek dwójłomności luster zostanie wielokrotnie zwiększony. Oznacza to, że konieczna będzie modulacja polaryzacji światła. W najprostszym przypadku może do tego służyć szybko obracająca się płytka półfalowa, jak to zostało przedstawione na rysunku 6.3. Ponieważ jednak pozwalałoby to jedynie na modulację w zakresie kHz, w rzeczywistości zostanie użyty specjalny modulator elektro-optyczny, pozwalający modulować polaryzację w zakresie kilku MHz. Po powtórnym przejściu przez modulator wiązka odzyska swoją liniową polaryzację, jednak o osi polaryzacji przekręconej o pewien niewielki kąt i z drobną eliptycznością. Następnie wiązka napotka płytkę ćwierćfalową, która zamieni polaryzację liniową na kołową. Dalej pryzmat Wollastona podzieli wiązki na dwie, które w przypadku braku eliptyczności i rotacji byłyby idealnie symetryczne. Jednakże w razie wystąpienia tych efektów, na detektorach wystąpi bardzo mała różnica mocy o bardzo wysokiej częstotliwości. Ten typ detekcji ma też bardzo dobry wpływ na zmniejszenie (aż do kilku rzędów wielkości) szumu

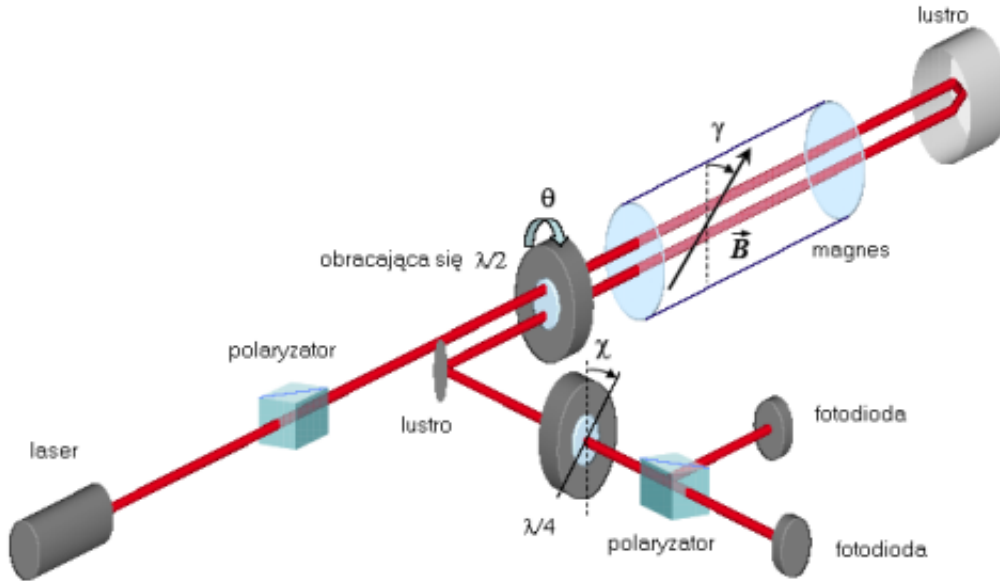


Rysunek 6.1: Przekrój poprzeczny przez wmontowany w kriostat nadprzewodzący magnes dipolowy dla LHC [7].



Rysunek 6.2: Schemat magnesu zamocowanego na ławie testowej podłączonego do CFB (Cryogenic Feed Box). Antykriostat używany jest w celu utrzymania luster wnęki rezonansowej w temperaturze pokojowej. W końcach obudowy magnesu zamontowane będą lustra, tak by znajdowały się już poza obszarem pola magnetycznego.

związanego z samym laserem (tzw. RIN³).



Rysunek 6.3: Uproszczony schemat układu pomiarowego dla pomiarów dwójłomności próżni.

Druga faza ma na celu kolejne zwiększenie czułości pomiarów, tak by móc sprawdzić przewidywanie elektrodynamiki kwantowej na poziomie drugiej poprawki, czyli 10^{-22} . Aby to osiągnąć, należy jeszcze znaleźć metodę przełamania bariery szumu śrutowego⁴. Powstało kilka koncepcji jak tego dokonać, żadna jednak nie doczekała się jeszcze realizacji.

Warto podkreślić jeszcze jedno źródło możliwego błędu systematycznego, mianowicie brak idealnej próżni i związany z tym efekt Cottona-Moutona dla bardzo rozrzedzonego gazu. Jak się jednak okazuje, dla możliwych do otrzymania ciśnień rzędu 10^{-9} torra, efekt ten będzie istotnie mniejszy od pierwszej poprawki wynikającej z QED. By móc przejść do drugiej fazy eksperymentu trzeba zmniejszyć ciśnienie o kolejne dwa rzędy wielkości, co na szczęście wydaje się być zadaniem wykonalnym w obliczu dostępnych możliwości technicznych.

W odniesieniu do poszukiwań aksjonów, wyniki tego eksperymentu nie będą miały tak dużego znaczenia, choć powinny być znacznie lepsze niż w przypadku istniejących ograniczeń wynikających z eksperymentów laserowych. Okazuje się bowiem, że eksperyment z regeneracją fotonów będzie nie tylko precyzyjniej nastawiony na wyłowienie aksjonu, ale i dużo mniej podatny na błędy aparaturowe i co więcej bardziej czuły. Dlatego też przewidywania teoretyczne przedstawimy jedynie dla eksperymentu z regeneracją fotonów.

6.1.2. Regeneracja fotonów

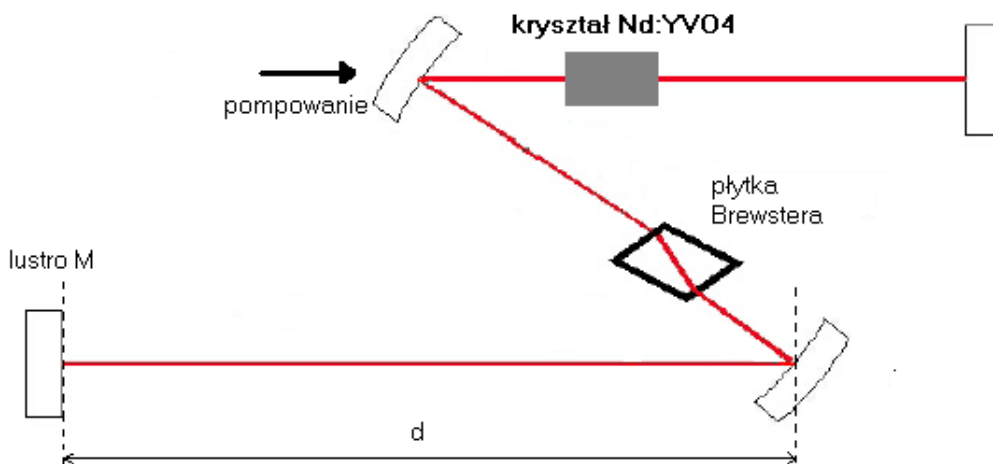
W celu otrzymania jak najlepszej wydajności należy w tym eksperymencie użyć lasera o jak największej mocy oraz wnęki Fabry'ego-Pérot'a o jak największej dobroci. Następnie oba te elementy muszą zostać optymalnie sprzężone, co stanowi pewne wyzwanie szczególnie z powodu długości wnęki - do eksperymentu potrzeba bowiem co najmniej kilku-, a najlepiej

³Z ang. relative intense noise.

⁴Z ang. shot noise - szum związany z fluktuacjami prądu na wskutek ziarnistej struktury ładunku elektrycznego.

kilkunastometrowej wnęki. Istnieją różne możliwe do wykorzystania techniki sprzężenia, jak np. *metoda Pounda-Drevera-Halla*, jednak ich zastosowanie nie jest możliwe w czasie krótszym od jednego roku, dlatego też postanowiono podzielić eksperyment na trzy fazy. Pierwsza, nazwana *fazą wstępną*, ograniczy się do mniej wyrafinowanych i tym samym mniej wydajnych metod dostrojenia lasera do wnęki, jednak możliwa będzie do wykonania w ciągu kilku miesięcy. Nawet mimo rezygnacji z najbardziej optymalnych rozwiązań, czułość układu pomiarowego użytego w tej fazie będzie na tyle duża, że będzie w stanie sprawdzić wyniki otrzymane przez eksperyment PVLAS w przeciągu niecałej godziny działania. Jednocześnie ruszą prace nad budową i kalibracją układu pomiarowego do tzw. *fazy pierwszej* eksperymentu, w której planowana jest optymalizacja współdziałania lasera i wnęki. Po zakończeniu pomiarów w tym układzie nastąpi *faza druga*, polegająca na implementacji rozszerzeń, związanych ze zwiększeniem liczby magnesów, wypełnieniu wnęki gazem buforowym oraz wszelkich możliwych udoskonaleniach.

W przypadku fazy wstępnej rozważane są dwa możliwe warianty. Pierwszy opiera się na wykorzystaniu lasera Nd:YVO4 z wnęką w kształcie litery Z, którego schemat przedstawiliśmy na rysunku 6.4. Jest to laser pompowany przez diodę laserową, który został zbudowany na Uniwersytecie w Grenoble. Jego maksymalna stabilna moc dla długości fali $\lambda = 1064$ nm wynosi około 150 W. Testy wykazały, iż przyczyną tego ograniczenia jest nadmierne nagrzewanie się kryształu. Wbudowanie wewnątrz magnesu ramienia wnęki zawierającego lustro M w pierwszym kroku może pozwolić na uzyskanie jednometrowego regionu wnęki w polu magnetycznym, przy wartości długości ramienia d wynoszącej 3 metry. Dalsze prace trwają nad drugim wariantem, polegającym na użyciu lasera (Ar+), który pozwoliłby na otrzymanie mocy do 1 kW dla długości fali 540 nm. Dodatkową zaletą lasera argonowego jest dostępność lepszych detektorów dla tej długości fali, o efektywności rzędu 50%. Planowane jest użycie chłodzonego detektora CCD, np. „LN2 cooled CCD”, pracującego w modzie zliczającym pojedyncze fotony.

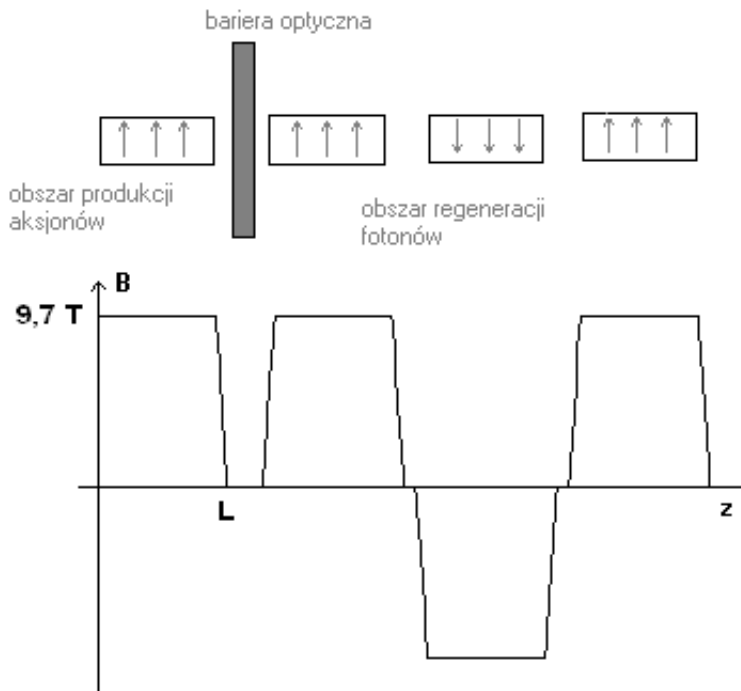


Rysunek 6.4: Schemat wnęki lasera Nd:YVO4 planowanego w fazie wstępnej. Płytkę Brewstera umieszczoną wewnątrz służy do uzyskania liniowej polaryzacji.

W kolejnej fazie można będzie już użyć lasera Nd:YVO4 pracującego na swojej maksymalnej mocy rzędu 10 kW dla $\lambda = 1064$ nm, sprzężonego z zewnętrzną wnęką rezonansową o długości 7 metrów (tak by długości obszarów przed i za barierą optyczną były identyczne,

co daje maksymalną liczbę zliczeń dla ustalonej długości magnesu, czyli 14 m) i dobroci rzędu $N = 10^4 \div 10^5$. Dla światła prawie podczerwonego najlepszymi detektorami są detektory typu bolometrycznego (termicznego) oparte na półprzewodnikach (Si, Ge lub InGaAs) bądź nadprzewodnikach. Jak na razie, preferowanym rozwiązaniem jest identyczny detektor jak w fazie wstępnej (z wydajnością około 18% dla 1064 nm), jednak wyniki wstępnych pomiarów prawdopodobnie dadzą cenne wskazówki w kwestii poszukiwań jeszcze lepszego rozwiązania.

Z punktu widzenia rozwiązań technicznych faza druga będzie bardzo mocno opierała się na doświadczeniach zdobytych w trakcie przeprowadzania eksperymentu. Dlatego skoncentrujemy się na teoretycznym przedstawieniu możliwych dróg modyfikacji układu pomiarowego, tak by łącząc z wynikami faz poprzednich obejmował jak największy zakres parametrów aksjonu. Istnieją dwie drogi rozwoju: w kierunku mniejszej stałej sprzężenia do dwóch fotonów, bądź większych możliwych mas aksjonu. Pierwsza opcja wydaje się być możliwa do osiągnięcia jedynie poprzez udoskonalenia czysto techniczne (mocniejszy laser, większa dobroć wnęki itp.), niestety trudne do osiągnięcia na dzisiejszym poziomie technologii lub też zwiększenia długości obszaru pola magnetycznego poprzez użycie kilku magnesów. To drugie rozwiązanie jest w dalszej perspektywie czasowej jak najbardziej realne, zważywszy iż istnieje możliwość podłączenia w prostej linii aż 5 magnesów dipolowych. Tego typu rozwiązanie powoduje jednak zmniejszenie czułości w zakresie mas aksjonu, poprzez wcześniejszą utratę spójności w propagacji aksjonu i fotonu (patrz równanie (5.33)). Aby spowodować by ten efekt był jak najmniej dotkliwy planowane jest ustawienie magnesów w takim trybie, by sąsiadujące ze sobą magnesy w obszarze regeneracji fotonów miały przeciwne polaryzacje. Przykładowo, dla 4 magnesów schemat takiego ułożenia znajduje się na rysunku 6.5.



Rysunek 6.5: Schemat ułożenia 4 magnesów w konfiguracji 1+3 z przemienną polaryzacją oraz schematyczny wykres wartości indukcji pola magnetycznego.

Zmiana polaryzacji zestawu magnesów wpływa na prawdopodobieństwo konwersji, gdyż w takim przypadku nie można już traktować pola magnetycznego jako jednorodnego w prze-

strzeni i do jego obliczenia należy skorzystać ze wzoru (5.35). Wzór ten wygodnie jest wyrazić w uproszczonej postaci

$$p(\gamma \rightarrow a) = \frac{B^2 L^2}{4M^2} F^2(q), \quad (6.1)$$

gdzie $F(q)$ to tzw. *czynnik struktury*, który zależy od kształtu pola magnetycznego

$$F(q) = \int e^{-iqz} \frac{B(z)}{B_0 L} dz. \quad (6.2)$$

Zakładając pole jednorodne łatwo otrzymać

$$F(q) = \frac{\sin(qL/2)}{qL/2}, \quad (6.3)$$

czyli wynik uzyskany poprzednio. Jednak dla n magnesów o długości L każdy, o przemiennej polaryzacji, po policzeniu powyższej całki okaże się, że czynnik struktury wyniesie

$$F(q) = \frac{\sin(nqL/2)}{nqL/2} \tan(qL/2). \quad (6.4)$$

W odróżnieniu od przypadku pola jednorodnego, w takiej sytuacji czynnik struktury nie ma maksimum dla $q = 0$ (przypomnijmy, że $q = \omega - \sqrt{\omega^2 - m_a^2}$, czyli $q = 0$ oznacza $m_a = 0$), lecz jest ono trochę przesunięte w kierunku dodatnich q . Oznacza to, że największe prawdopodobieństwo konwersji byłoby dla aksjonów o większej masie niż poprzednio, co skutkuje przesunięciem czułości eksperymentu na trochę cięższe aksjony.

W zasadzie można by próbować stworzyć inne konfiguracje pola magnetycznego dające jeszcze korzystniejsze efekty, jednak jesteśmy tutaj bardzo ograniczeni przez możliwości techniczne, gdyż istniejące magnesy o zmiennym polu mają jednocześnie znacząco mniejszą wartość B_{\max} .

Drugim sposobem zyskania większej czułości w kierunku większych mas aksjonu jest wykorzystanie gazu buforowego. W przeciwieństwie do eksperymentu polaryzacyjnego tutaj gaz znajdujący się w magnesie nie powoduje błędu systematycznego (może jedynie zwiększać tło w detektorze, jednak w sposób mało znaczący). Dlatego też nie ma potrzeby dbać o wysoką jakość próżni wewnątrz wnęki rezonansowej, ani w obszarze regeneracji. Co więcej, obecność *zjonizowanego* gazu może być korzystna, gdyż wtedy relacja dyspersyjna dla fotonów jest dana przez

$$k_\omega = n\omega, \quad (6.5)$$

gdzie n jest współczynnikiem załamania, którego postać daje⁵

$$k_\omega = \omega \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right), \quad (6.6)$$

gdzie ω_p to częstość plazmowa ośrodka. Dla próżni $\omega_p = 0$ i otrzymujemy zwykłą relację dyspersyjną. Z drugiej strony obecność gazu nie zmienia propagacji aksjonu, ze względu na jego niezwykle słabe sprzężenie do materii. Tak więc jego pęd można zapisać w sposób następujący

$$k_a = \sqrt{\omega^2 - m_a^2} \approx \omega \left(1 - \frac{m_a^2}{2\omega^2} \right) \quad (6.7)$$

⁵Podkreślamy, że chodzi o przypadek propagacji w plazmie, co niekoniecznie da się wykorzystać eksperymentalnie - prace nad tym zagadnieniem ciągle trwają.

i jest taki sam jak w próżni, skąd

$$q = \frac{m_a^2}{2\omega} - \frac{\omega_p^2}{2\omega}. \quad (6.8)$$

Odległość L na jakiej aksjon i foton propagują się koherentnie jest zdefiniowana jako

$$L |k_\omega - k_a| < \pi. \quad (6.9)$$

Po wstawieniu (6.6) i (6.7) oraz drobnych przekształceniach otrzymujemy

$$\omega_p^2 - \frac{2\pi\omega}{L} < m_a^2 < \omega_p^2 + \frac{2\pi\omega}{L}. \quad (6.10)$$

Oznacza to, że odzyskujemy propagację koherentną dla mas większych o $\sqrt{\frac{2\pi\omega}{L}}$ w porównaniu do próżni. Co więcej, zwiększenie częstości plazmowej (np. przez zwiększanie ciśnienia gazu przy stałej temperaturze) pozwoliłoby na osiągnięcie większej czułości dla aksjonów o coraz to większej masie.

Podsumowując, w planach są dwa typy modyfikacji eksperymentu polegające na podłączeniu większej liczby magnesów w celu zbadania mniejszych stałych sprzężenia aksjonu do fotonów, wykorzystanie przemiennej polaryzacji sąsiednich magnesów oraz ewentualnie użycie gazu buforowego, w celu zwiększenia czułości w kierunku większych mas aksjonu.

6.2. Przewidywania teoretyczne

Przewidywane wyniki eksperymentu z regeneracją fotonów interpretowane jako poszukiwania cząstki pseudoskalarnej o masie m_a i stałej sprzężenia do dwóch fotonów g można przedstawić w postaci *diagramu wykluczenia*. Taki wykres dla wszystkich możliwych faz eksperymentu OSQAR przedstawiony jest na rysunku 6.6. Obliczenia prowadzące do tego wykresu zostały wykonane podczas mojego pobytu na stażu w CERN-ie w lecie 2006 roku i stanowią oryginalny wynik tej pracy. Dla tych konkretnych warunków przyjęliśmy $\lambda = 1064 \text{ nm}$ co daje $\omega = 1,165 \text{ eV}$, efektywność detekcji na poziomie 75% (czyli $\eta = 0,75$)⁶ oraz

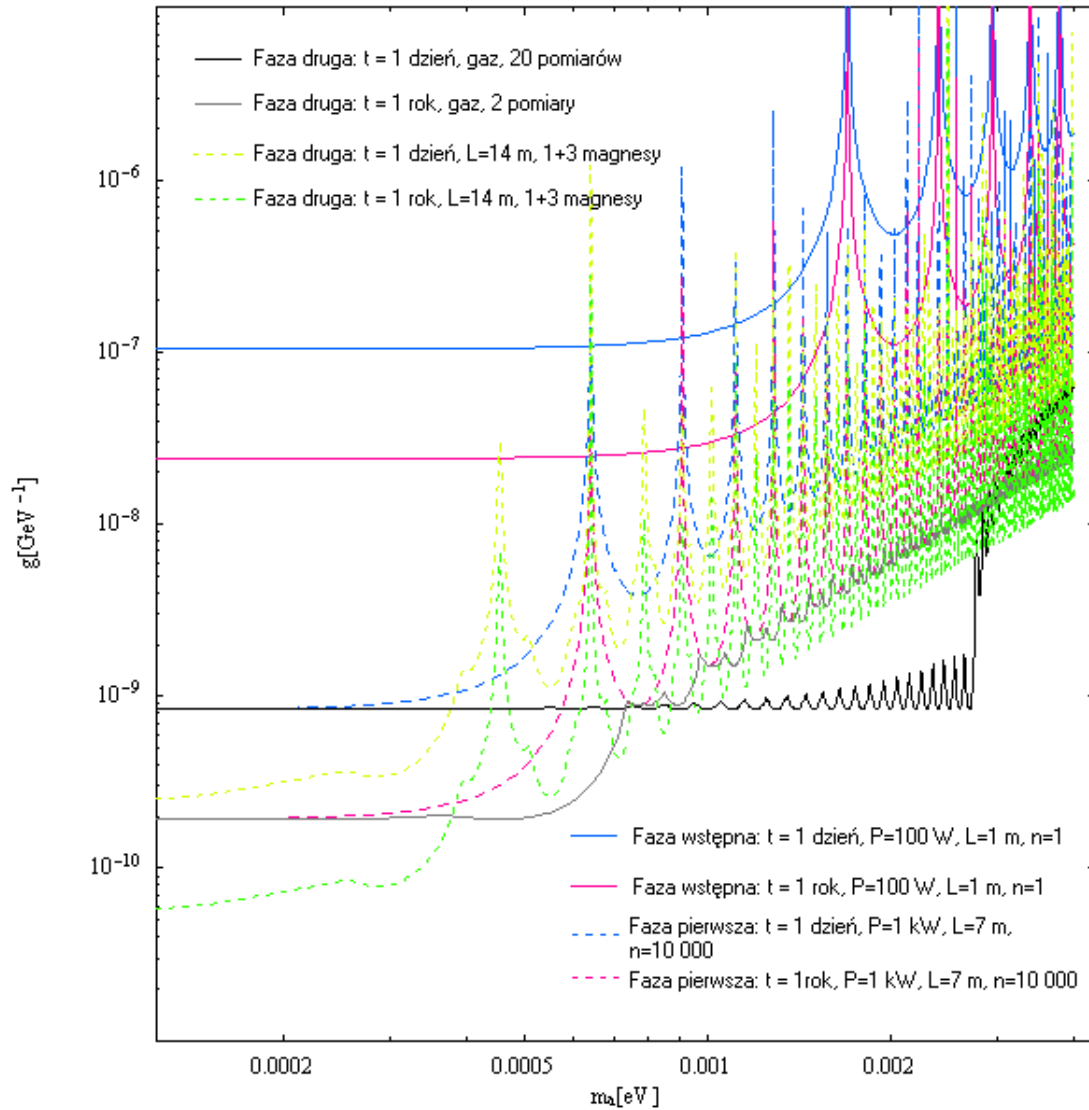
- $P_L = 100 \text{ W}$, $L = 1 \text{ m}$, $N = 1$ - dla fazy wstępnej,
- $P_L = 1 \text{ kW}$, $L = 7 \text{ m}$, $N = 10^4$ - dla faz pierwszej i drugiej.

Ponadto w drugiej fazie uwzględniliśmy osobno użycie gazu buforowego z odpowiednio 20 i 2 pomiarami dla różnych częstości plazmowych oraz wykorzystanie większej liczby magnesów (dla przykładu pokazaliśmy wykres z $n = 3$, wyniki dla $n = 2$ i $n = 4$ są oczywiście trochę inne, lecz nie wnoszą żadnych nowych treści jakościowych).

W fazie wstępnej eksperyment OSQAR pozwoli na przetestowanie i usprawnienie sprzętu oraz sprawdzenie wyników PVLAS. W fazie pierwszej otrzymana czułość da ograniczenia na stałą sprzężenia aksjonu do dwóch fotonów (dla czasów działania pomiaru odpowiednio 1 dzień i 1 rok)

$$\begin{aligned} g_{a\gamma\gamma} &> 8,5 \cdot 10^{-9} && \text{dla czasu pomiaru } t = 1 \text{ dzień,} \\ g_{a\gamma\gamma} &> 1,9 \cdot 10^{-10} && \text{dla czasu pomiaru } t = 1 \text{ rok,} \end{aligned}$$

⁶Wartość ta w rzeczywistości będzie mniejsza niż opisywaliśmy w podrozdziale 6.1.2 lecz po pierwsze, czynnik wchodzi do ostatecznego w potęgę 1/4, czyli czynnik 2 nie czyni dużej różnicy, po drugie, wynik można łatwo dostosować do innej wartości parametru η przeskalowując czas pomiaru.



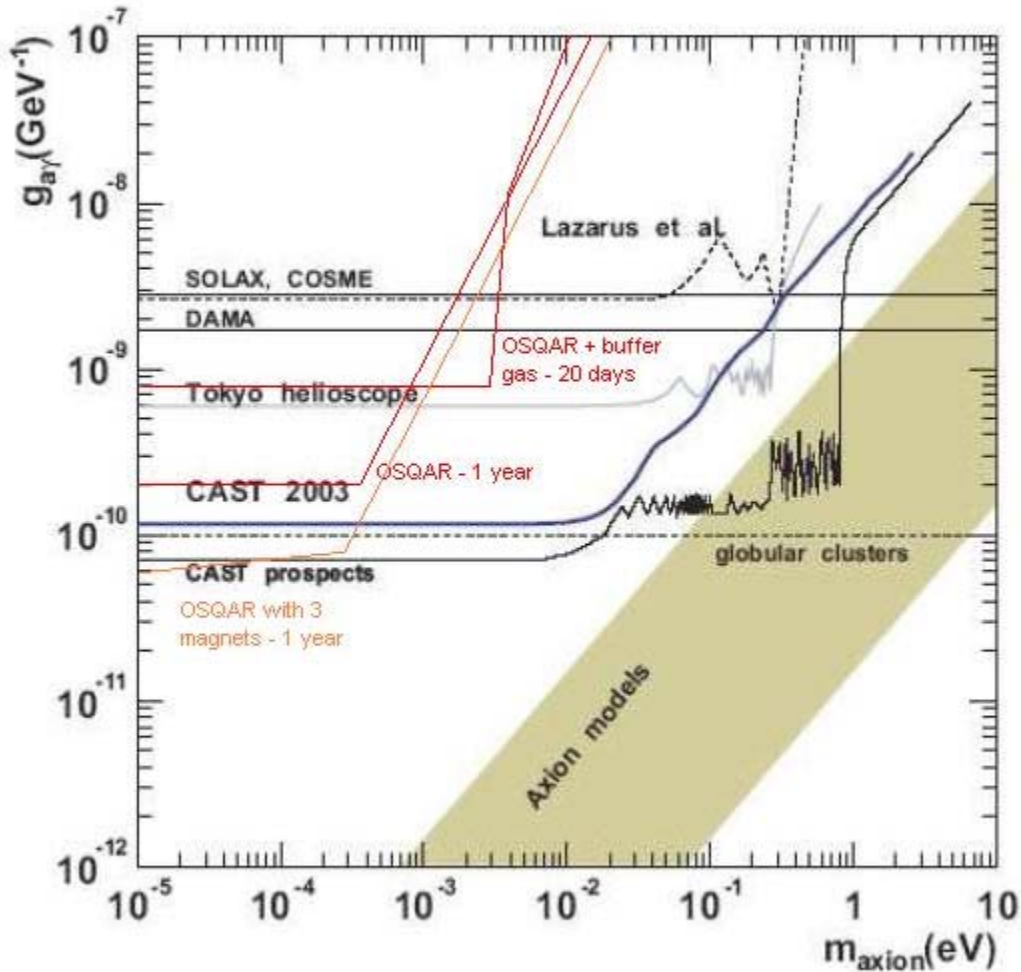
Rysunek 6.6: Diagram wykluczenia dla eksperymentu OSQAR z regeneracją fotonów. Pokazane są różne możliwe warianty eksperymentu dla wszystkich trzech faz. Parametry układów dane są na wykresie. Wyniki doświadczeń z gazem buforowym są przedstawione jako kumulowane wyniki 20 pomiarów jednodniowych oraz 2 pomiarów rocznych.

dla mas aksjonu mniejszych od około $0,5 \text{ meV}$. W fazie drugiej, jeśli wykorzystamy możliwe rozszerzenia eksperymentu o większą liczbę magnesów ustawionych tak by w obszarze regeneracji miały przemienną polaryzację, wyniki te będzie można poparwić do

$$g_{a\gamma\gamma} > 2,5 \cdot 10^{-10} \quad \text{dla czasu pomiaru } t = 1 \text{ dzień,}$$

$$g_{a\gamma\gamma} > 5,9 \cdot 10^{-11} \quad \text{dla czasu pomiaru } t = 1 \text{ rok.}$$

Natomiast jeśli możliwe okaże się użycie gazu buforowego, to uda się zwiększyć zakres mas prawie o rząd wielkości, mianowicie do około $m_a < 2 \text{ meV}$.



Rysunek 6.7: Czulość eksperymentu OSQAR z regeneracją fotonów dla trzech konfiguracji naniesiona na wyniki CAST [54] i innych obserwacji astrofizycznych. Przedstawiono wyniki dla czasu trwania pomiarów wynoszącego 1 rok, dla fazy pierwszej i dwóch rozszerzeń fazy drugiej - z gazem buforowym i 1+3 magnesami.

Warto zauważyć, że prawie osiągnięta zostanie czulość jak dotąd niedoścignionego eksperymentu CAST już w fazie pierwszej, w zakresie mas aksjonu interesujących z punktu widzenia ich kandydatury na ciemną materię (patrz rysunek 6.7), natomiast w fazie drugiej zostanie nawet poprawiona.

Rozdział 7

Podsumowanie

W ostatnich latach powstało wiele prób wyjaśnienia problemu łamania CP w oddziaływaniach silnych, jednak wciąż najbardziej obiecującym rozwiązaniem wydaje się być mechanizm Peccei-Quinn i wynikający z niego aksjon, chociaż liczy on sobie już przeszło trzydzieści lat. Dodatkową, niezwykle ważną cechą hipotetycznego aksjonu jest jego możliwa rola w kosmologii. Stanowi on najlepszego, a właściwie praktycznie jak dotąd jedynego niesupersymetrycznego kandydata na zimną ciemną materię. Do przyjęcia tego rozwiązania brakuje tylko jednego - zaobserwowania aksjonu. Zadanie to okazuje się być doświadczalnie na tyle trudne, że przez tak wiele lat nikomu nie udało się otrzymać żadnych rozstrzygających wyników. Postęp technologiczny ostatnich lat pozwolił jednak eksperymentatorom powrócić do poszukiwań aksjonu, tym razem z większymi nadziejami na końcowy sukces. Nadzieje to umocniły jeszcze ostatnie wyniki PVLAS, sugerujące wykrycie nowej cząstki. Powstaje coraz to więcej nowych projektów badawczych mających na celu sprawdzenie tych wyników i przebadanie możliwie jak największego obszaru parametrów aksjonu. Jednym z nich jest OSQAR, w który zaangażowana jest grupa z Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i w przygotowaniu którego brałem udział podczas stażu w CERN-ie w lecie 2006 roku. Niniejsza praca stanowi kontynuację tych przygotowań, głównie w zakresie głębszego poznania teorii aksjonu.

Od strony teoretycznej przedstawiona praca ma charakter przede wszystkim przeglądowy. Jej celem było możliwie jak najdokładniejsze omówienie teorii stojącej u podstaw aksjonu, jak i implikacji kosmologicznych oraz fenomenologicznych jego ewentualnego istnienia. W rozdziale 2 zaczęliśmy od podstaw teoretycznych, przedstawiliśmy genezę problemu łamania CP w oddziaływaniach silnych i jego możliwe rozwiązania, potem w rozdziale 3 przeszliśmy do omówienia modeli aksjonu jako konkretnych realizacji mechanizmu Peccei-Quinn. Dokładnie rozważaliśmy trzy modele: PQWW, KSVZ i DFSZ, w obrębie których wyprowadziliśmy wyrażenia na najistotniejsze parametry aksjonu, tj. jego masę i sprzężenie do dwóch fotonów. Następnie przeprowadziliśmy dyskusję możliwych modyfikacji tych modeli. Zauważyliśmy, że istniejące modele są mało elastyczne, jednak przynajmniej aksjon KSVZ można zmodyfikować czyniąc go jeszcze słabiej oddziałującym z fotonami bez zmiany skali f_a i tym samym bez konfliktu z ograniczeniami kosmologicznymi. Następnie omówiliśmy mechanizmy produkcji aksjonów we wczesnym Wszechświecie i wyjaśniliśmy czemu aksjon stanowi bardzo dobrego kandydata na zimną ciemną materię. Wyprowadziliśmy też wzory na gęstość energii reliktowych aksjonów i tym samym ich wkład do całkowitej gęstości energii, skąd otrzymaliśmy ograniczenie na skalę f_a . Rozdział 5 poświęcony był aspektom fenomenologicznym. Zakreśliliśmy w nim obszar parametrów, w którym aksjon może się znajdować bez konfliktu z eksperymentem czy obserwacjami astrofizycznymi oraz obszar, w którym realnie może być poszukiwany w doświadczeniach. Następnie omówiliśmy zasady działania zarówno przeprowadzonych, jak

również właśnie wykonywanych oraz planowanych eksperymentów, kładąc szczególny nacisk na pełne przedstawienie teorii stojącej u podstaw eksperymentów laserowych.

Ostatni rozdział w całości poświęcony był projektowi OSQAR i w tej części pracy znalazło się też trochę oryginalnych wyników. Najważniejsze z nich to przewidywania teoretyczne czułości eksperymentu OSQAR z regeneracją fotonów dla wielu różnych możliwych konfiguracji układu pomiarowego. Rozważając wiele możliwych modyfikacji układu pomiarowego, dokładnie omówionych w rozdziale 6, następnie wybierając optymalne, uzyskaliśmy wynik mówiący, że maksymalny zbadany obszar w zakresie sprzężenia do fotonów wyniesie

$$\begin{aligned} g_{a\gamma\gamma} &> 2,5 \cdot 10^{-10} && \text{dla czasu pomiaru } t = 1 \text{ dzień,} \\ g_{a\gamma\gamma} &> 5,9 \cdot 10^{-11} && \text{dla czasu pomiaru } t = 1 \text{ rok.} \end{aligned}$$

Wyniki przedstawiliśmy także na wykresie 6.6. Oznacza to, że w przypadku wykorzystania planowanych rozszerzeń eksperymentu, jego czułość pozwoli zbadać większy zakres sprzężenia aksjonu do fotonów niż wynikający z ograniczeń nałożonych przez CAST. Ponadto, w przeciwieństwie do projektu CAST, wynik otrzymany w eksperymencie OSQAR będzie niezależny od modeli astrofizycznych. Ta część niniejszej pracy została opublikowana w projekcie [7].

Kolejnym uzyskanym wynikiem jest zawarte w dodatku A powtórzenie obliczeń przekrojów czynnych na różne możliwe reakcje aksjonu z gluonami i kwarkami. Są one potrzebne do otrzymania ograniczenia na skalę f_a łamania symetrii Peccei-Quinn, które jeśli jest spełnione, to w chwili obecnej istnieje reliktowa populacja aksjonów termicznych. Otrzymaliśmy wynik¹

$$f_a < 2,8 \cdot 10^{11} \text{ GeV,}$$

który oznacza, że praktycznie każdy model aksjonu spełniający ograniczenia kosmologiczne skutkuje istnieniem reliktowej populacji termicznej. Jej wykrycie, aczkolwiek doświadczalnie niesłychanie trudne, pozwoliłoby dotrzeć na gruncie doświadczenia do bardzo wczesnego etapu ewolucji Wszechświata.

¹W pracy Masso *et al.* [55] można znaleźć trochę inną wartość liczbową, co wynika z innych wartości przekrojów czynnych - patrz dodatek A.

Bibliografia

- [1] S. Weinberg, *The U(1) problem*, Phys. Rev. **D11** (1975) 3583.
- [2] G. 't Hooft, *Computation of the Quantum Effects due to a Four-Dimensional Pseudoparticle*, Phys. Rev. **D14** (1976) 3432; oraz *Symmetry Breaking through Bell-Jackiw Anomalies*, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 8.
- [3] S. Weinberg, *A New Light Boson?*, Phys. Rev. Lett. **40** (1978) 223.
- [4] F. Wilczek, *Problem Of Strong P And T Invariance In The Presence Of Instantons*, Phys. Rev. Lett. **40** (1978) 279.
- [5] J. E. Kim, *Weak Interaction Singlet and CP Invariance*, Phys. Rev. Lett. **43** (1979) 103; M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, *Can Confinement Ensure Natural CP Invariance of Strong Interactions?*, Nucl. Phys. **B166** (1980) 493.
- [6] A. R. Zhitnitskii, *On Possible Suppression Of The Axion Hadron Interactions*, Sov. J. Nucl. Phys. **31** (1980) 260; M. Dine, W. Fischler, M. Srednicki, *A Simple Solution To The Strong CP Problem With A Harmless Axion*, Phys. Lett. **B104** (1981) 199.
- [7] A. Hryczuk w P. Pugnát *et al.*, *Optical Search for QED vacuum magnetic birefringence, Axions and photon Regeneration*, CERN-SPSC-2006-035 (Nov 2006).
- [8] Reinhold A. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, Clarendon Press, Oxford 1996.
- [9] K. Fujikawa, *Path-Integral Measure for Gauge-Invariant Fermion Theories*, Phys. Rev. Lett. **42**, (1979) 1195.
- [10] M. Schifman, *Instantons in gauge theories*, World Scientific, 1994.
- [11] S. Weinberg, *Teoria pól kwantowych t.2*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999.
- [12] N. F. Ramsey, *Electric Dipole Moment Of The Neutron*, Ann. Rev. Nucl. Part. Phys. **40** (1990) 1.
- [13] R.D. Peccei, *The Strong CP Problem and Axions*, arXiv:hep-ph/0607268 v1.
- [14] V. Baluni, *CP-nonconserving effects in quantum chromodynamics*, Phys. Rev. **D19**, 2227 (1978).
- [15] R. J. Crewther, P. Di Vecchia, G. Veneziano i E. Witten, *Chiral Estimate of the Electric Dipole Moment of the Neutron in Quantum Chromodynamics*, Phys. Lett. **88B**, (1979) 123.

- [16] R. Peccei, H. Quinn, *CP Conservation in the Presence of Pseudoparticles*, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 1440.
- [17] D. B. Kaplan, A. V. Manohar, *Current-Mass Ratios of the Light Quarks*, Phys. Rev. Lett. **56**, (1986) 2004.
- [18] S. Khlebnikov, M. Shaposhnikov, *Extra Space-time Dimensions: Towards a Solution To The Strong CP Problem*, Phys. Lett. **B203**, (1988) 121.
- [19] J. E. Kim, *Light Pseudoscalars, Particle Physics and Cosmology*, Phys. Rep. Vol. **150** (1987).
- [20] H. Georgi, *Grand Unified Theories and Related Topics*, ed. M. Konuma, T. Maskawa, World Scientific Publishing Co., Singapore 1981, 209.
- [21] D.J. Gross, R.D. Pisarski, L.G. Yaffa, *QCD and instantons at finite temperature*, Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 43.
- [22] C. Vafa, E. Witten, *Parity Conservation in Quantum Chromodynamics*, Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 535.
- [23] W. Bardeen, S. Tye, *Current Algebra Applied To Properties Of The Light Higgs Boson* Phys. Lett. **B74** (1978) 229.
- [24] Kandasawamy *et al.*, *Current algebra with a four-flavour effective Lagrangian*, Phys. Rev. **D17** (1978) 1430.
- [25] E. Kolb, M. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [26] A. Vilenkin, A. Everett, *Cosmic Strings and Domain Walls in Models with Goldstone and Pseudo-Goldstone Bosons*, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1867.
- [27] M. Hindmarsh, T. Kibble, *Cosmic strings*, arXiv:hep-ph/9411342v1.
- [28] A. Vilenkin, E. Shellard, *Cosmic Strings and other Topological Defects*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1994.
- [29] J. Preskill, M. Wise, F. Wilczek, *Cosmology of the Invisible Axion*, Phys. Lett. **B120**, (1983) 127.
- [30] M. Turner, *Cosmic and local mass density of “invisible” axions*, Phys. Rev. **D33**, (1986) 889.
- [31] P. Sikivie, *Axion Cosmology*, [arXiv:astro-ph/0610440v2].
- [32] S. Chang, C. Hagmann, P. Sikivie, *Studies of the motion and decay of axion walls bounded by strings*, Phys. Rev. **D59** (1999) 023505.
- [33] R. Davis, *Cosmic Axions from Cosmic Strings*, Phys. Lett. **180B**, (1986) 225.
- [34] D. Harari, P. Sikivie, Phys. Lett. **195B**, (1987) 361.
- [35] R. Barbieri, D. Nanopoulos, D. Wyler, Phys. Lett. **B106** (1981) 303.
- [36] M. Turner, *Axions from SN1987A*, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 1797.

- [37] P. Sikivie, *Experimental Tests of the "Invisible Axion"*, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 1415.
- [38] G. Carosi, K. van Bibber, *Cavity Microwave Searches for Cosmological Axions*, arXiv:hep-ex/0701025v1.
- [39] R. Bradley et al. *Microwave cavity searches for dark-matter axions*, Rev. Mod. Phys., **75** (2003) 777.
- [40] L. Maiani, R. Petronzio, E. Zavattini, *Effects of nearly massless, spin-zero particles on light propagation in a magnetic field*, Phys. Lett. B **175** (1986) 359.
- [41] Cameron *et al.*, *Search for nearly massless, weakly coupled particles by optical techniques*, Phys. Rev. D **47** (1993) 3707.
- [42] K. van Bibber *et al.*, *Proposed experiment to produce and detect light pseudoscalars*, Phys. Rev. Lett. **59** (1987) 759.
- [43] G. Raffelt, L. Stodolsky, *Mixing of the photon with low-mass particles*, Phys. Rev. D **37**, 5 (1988) 1237.
- [44] R. Rabadan, A. Ringwald i K. Sigurdson, *Photon Regeneration from Pseudoscalars at X-ray Laser Facilities*, [arXiv:hep-ph/0511103v1].
- [45] M. A. Bershadsky, M. T. Ressell i M. S. Turner, *Telescope search for a 3-eV to 8-eV axion*, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 1398.
- [46] J. N. Bahcall, M. H. Pinsonneault, *What do we (not) know theoretically about solar neutrino fluxes?*, Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 121301, [arXiv:astro-ph/0402114].
- [47] F. T. Avignone III *et al.* [SOLAX Collaboration], *Experimental Search for Solar Axions via Coherent Primakoff Conversion in a Germanium Spectrometer*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 5068, [arXiv:astro-ph/9708008].
- [48] A. Morales *et al.* [COSME Collaboration], *Particle Dark Matter and Solar Axion Searches with a Small Germanium Detector at the Canfranc Underground Laboratory*, Astropart. Phys. **16** (2002) 325, [arXiv:hep-ex/0101037].
- [49] R. Bernabei *et al.*, *Search for Solar Axions by Primakoff Effect in NaI Crystals*, Phys. Lett. **B515** (2001) 6.
- [50] D. M. Lazarus *et al.*, *Search for Solar Axions*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 2333.
- [51] S. Moriyama *et al.*, *Direct Search for Solar Axions by Using Strong Magnetic Field and X-Ray Detectors*, Phys. Lett. **B434** (1998) 147, [arXiv:hep-ex/9805026].
- [52] G. Raffelt, *Particle Physics from Stars*, (1999) [arXiv:hep-ph/9903472].
- [53] A. Ringwald *et al.*, *Illuminating the Hidden Sector of String Theory by Shining Light through a Magnetic Field*, [arXiv:hep-ph/0608248 v1].
- [54] CAST K. Zioutas *et al.*, *First Results from the CERN Axion Solar Telescope (CAST)*, Phys. Rev. Lett. **94** (2005)121301; [arXiv:hep-ex/0411033].
- [55] E. Masso, F. Rota, G. Zsembinszki, *Axion thermalization in the early universe*, Phys. Rev. **D66**, (2002) 023004.

Dodatek A

Przekroje czynne

W rozdziale 4 otrzymaliśmy warunek, jaki musi spełniać stała f_a , aby istniała termiczna populacja aksjonów. W tym celu potrzebowaliśmy znać wartość całkowitego przekroju czynnego Γ na wszystkie możliwe reakcje typu $a + i \rightarrow 1 + 2$. Poniżej przedstawimy stosowne obliczenia prowadzące do jego otrzymania.

Całkowity przekrój czynny Γ zdefiniowany jest przez

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i = \sum_i n_i \langle v \sigma_{a+i \rightarrow 1+2} \rangle \quad (\text{A.1})$$

oraz równanie (4.21). Skąd

$$\Gamma_i = (n_a^{eq})^{-1} \int d\Pi_a d\Pi_i d\Pi_1 d\Pi_2 (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_i - p_1 - p_2) f_a^{eq} f_i^{eq} |M|^2. \quad (\text{A.2})$$

Poniżej, by otrzymać dokładniejszy wynik niewiele większym nakładem pracy, będziemy wykonywać rachunki bez przybliżenia rozkładów Fermiego-Diraca i Bosego-Einsteina rozkładem Maxwella-Boltzmana. Wtedy

$$f_i^{eq} = \frac{1}{e^{(E_i - \mu_i)/T} \pm 1}, \quad (\text{A.3})$$

gdzie znak „+” występuje dla kwarków, a znak „-” dla aksjonu i gluonów. Ponieważ (A.2) jest lorentzowsko niezmiennicze, to możemy obliczyć Γ w układzie środka masy obu zderzających się cząstek (aksjonu i gluonu bądź kwarku). Przybiera ono wtedy prostszą postać

$$\Gamma_i = (n_a^{eq})^{-1} \int d\Pi_a d\Pi_i f_a^{eq} f_i^{eq} (2s \sigma_{CM}^i), \quad (\text{A.4})$$

gdzie $s = (p_a + p_i)^2$ to zmienna Mandelstama, natomiast σ_{CM}^i przekrój czynny na reakcję „ i -tego typu”, jednak z wysumowaniem po początkowych stopniach swobody zamiast uśredniania (chcemy uwzględnić wszystkie możliwe reakcje). Diagramy Feynmana odpowiadające powyższym procesom przedstawione są na rysunkach 4.3, 4.4 i 4.5 oraz poniżej z oznaczeniami pędów i polaryzacji na Rys. A.2, A.3 oraz A.5.

Rozważane procesy zachodzą w bardzo wczesnym Wszechświecie, gdy temperatura jest na tyle duża, że można pominąć masy wszystkich cząstek i wszystkie rachunki wykonywać w granicy bezmasowej. W tym przybliżeniu mamy procesy „elastyczne”, tak więc różniczkowy przekrój czynny w środku masy dany jest wzorem

$$d\sigma_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 s} |M|^2 d\Omega. \quad (\text{A.5})$$

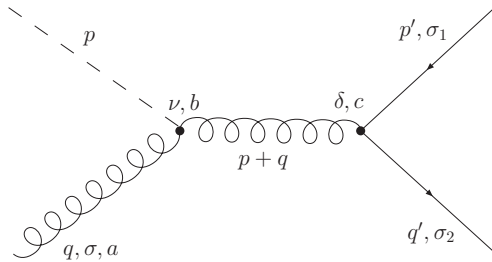
W tych warunkach występuje plazma QCD, ze znikającym całkowitym kolorem, tak więc efektywnie oddziaływania silne są ekranowane dla odległości większych od m_D^{-1} , gdzie $m_D = 8\pi\alpha_s T^2$ to tzw. *masa Debye'a* [55]. W związku z tym będziemy używać jej kwadratu jako obcięcia w podczerwieni.

Zacznijmy od reakcji $a + g \leftrightarrow q + \bar{q}$. Odczytując wierzchołki z lagranżjanu (2.82) otrzymamy (Rys. A.1):

Rysunek A.1: Reguły Feynmana dla procesu $a + g \leftrightarrow q + \bar{q}$ (wszystkie pędy traktujemy jako wchodzące do wierzchołka).

W cechowaniu $\xi = 1$ amplituda dla tego procesu wygląda następująco (patrz Rys. A.2):

$$-iM = i \frac{g^3}{16\pi^2 f_a} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho (p+q)_\mu \bar{u}(p', \sigma_1) \gamma^\delta T^a v(q', \sigma_2) \frac{g\delta_\nu}{(p+q)^2} \varepsilon_\sigma(q, \sigma). \quad (\text{A.6})$$



Rysunek A.2: Diagram Feynmana dla procesu $a + g \leftrightarrow q + \bar{q}$.

Podnosząc jej moduł do kwadratu, sumując po początkowych i końcowych stopniach swobody oraz korzystając ze wzorów¹

$$\sum_{\sigma} \varepsilon_{\mu}(q, \sigma) \varepsilon_{\nu}^{*}(q, \sigma) \rightarrow -g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.7})$$

$$\sum_{\sigma_1} u_{\alpha}(p, \sigma_1) \bar{u}_{\beta}(p, \sigma_1) = (\not{p} + m)_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.8})$$

$$\sum_{\sigma_2} v_{\alpha}(p, \sigma_2) \bar{v}_{\beta}(p, \sigma_2) = (\not{p} - m)_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.9})$$

¹W zasadzie w QCD pierwsza z tych tożsamości nie zachodzi, mamy za to $\sum_{\sigma} \varepsilon_{\mu}(q, \sigma) \varepsilon_{\nu}^{*}(q, \sigma) = -g_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu}$, gdzie $Q_{\mu\nu} = \frac{-1}{nq}^2 [-(nq)(q^{\mu}n^{\nu} + q^{\nu}n^{\mu}) + n^2 q^{\mu}q^{\nu}]$, a n to pewien ustalony czterowektor. Jednak można się łatwo przekonać, że w rozważanych przypadkach człon z $Q_{\mu\nu}$ nie da wkładu, gdyż, po pierwsze, rozważamy wszystkie cząstki jako bezmasowe, po drugie, z uwagi na antysymetryczność przez $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

otrzymamy

$$\sum_a \sum_{\sigma, \sigma_1, \sigma_2} |-iM|^2 = \sum_a \frac{g^6}{16^2 \pi^4 f_a^2} \text{Tr} \{T^a T^a\} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\sigma'}^{\mu'\nu'\rho'} q_{\alpha} q_{\alpha'} (p+q)_{\mu} (p+q)_{\mu'} \cdot \text{Tr} \{ \gamma_{\nu'} (\not{q}' - m_q) \gamma_{\nu} (\not{p}' + m_q) \}. \quad (\text{A.10})$$

W następnym kroku korzystamy z własności śladów macierzy gamma

$$\text{Tr} \{ \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} \gamma^{\sigma} \} = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}), \quad (\text{A.11})$$

$$\text{Tr} \{ \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \} = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{A.12})$$

oraz zwięzienia dwóch antysymetrycznych pseudotensorów ϵ po jednym wskaźniku

$$\epsilon^{\gamma\mu\delta\alpha} \epsilon_{\gamma}^{\rho\beta\sigma} = -(g^{\mu\rho} g^{\delta\beta} g^{\alpha\sigma} + g^{\alpha\rho} g^{\mu\beta} g^{\delta\sigma} + g^{\delta\rho} g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} - g^{\delta\rho} g^{\mu\beta} g^{\alpha\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\alpha\beta} g^{\delta\sigma} - g^{\alpha\rho} g^{\delta\beta} g^{\mu\sigma}). \quad (\text{A.13})$$

Wstawiając to do (A.10) i wykonując trochę przekształceń algebraicznych otrzymujemy

$$\sum_a \sum_{\sigma, \sigma_1, \sigma_2} |-iM|^2 = \frac{g^6}{128\pi^4 f_a^2} \sum_a \text{Tr} \{T^a T^a\} \frac{1}{pq} [m_q^2(pq) + (pp')(qq') + (q'p)(qp')]. \quad (\text{A.14})$$

Wykonując sumę i ślad po generatorach $SU(3)$ mamy

$$\sum_a \sum_{\sigma, \sigma_1, \sigma_2} |-iM|^2 = \frac{g^6}{32\pi^4 f_a^2} \frac{1}{pq} [m_q^2(pq) + (pp')(qq') + (q'p)(qp')]. \quad (\text{A.15})$$

W układzie środka masy tak dobieramy współrzędne by (wpierw zakładając niezerową masę kwarku m_q)

$$\begin{aligned} p &= (k, 0, 0, k) & p' &= (E, 0, k \sin \theta, -k \cos \theta), \\ q &= (k, 0, 0, -k) & q' &= (E, 0, -k \sin \theta, k \cos \theta). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Możemy już policzyć przekrój czynny, co ze wzoru (A.5) daje

$$d\sigma_{\text{CM}}^{(1)} = \frac{1}{64\pi^2 4k^2} \frac{g^6}{32\pi^4 f_a^2} (k^2(1 + \cos^2 \theta) - m_q^2) d\Omega. \quad (\text{A.17})$$

Widać, że ten proces daje skończony całkowity przekrój czynny, który po wycałkowaniu po kątach wynosi

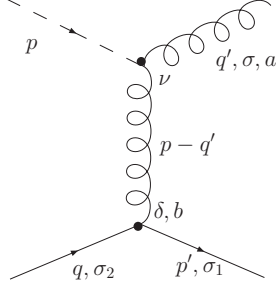
$$\sigma_{\text{CM}}^{(1)} = \frac{N_f}{64} \frac{\alpha_s^3}{\pi^2 f_a^2} \left(\frac{8}{3} - \frac{2m_q^2}{k^2} \right), \quad (\text{A.18})$$

gdzie $\alpha_s = g^2/4\pi$ i wysumowaliśmy dodatkowo po wszystkich zapachach kwarków (czynnik $N_f = 6$). W granicy $m_q \rightarrow 0$ mamy więc

$$\sigma_{\text{CM}}^{(1)} = \frac{N_f}{4 \cdot 6} \frac{\alpha_s^3}{\pi^2 f_a^2}. \quad (\text{A.19})$$

Przejdźmy teraz do procesu $a + q \leftrightarrow g + q$ (Rys. A.3). Amplituda w tym przypadku jest niemal identyczna i wynosi

$$-iM = -i \frac{g^3}{16\pi^2 f_a} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q'_{\rho} (p - q')_{\mu} \bar{u}(p', \sigma_1) \gamma^{\delta} T^a v(q, \sigma_2) \frac{g_{\delta\nu}}{(p - q')^2} \epsilon_{\sigma}^*(q', \sigma). \quad (\text{A.20})$$



Rysunek A.3: Diagram Feynmana dla procesu $a + q \leftrightarrow g + q$.

Proces ten jest bardzo podobny do poprzedniego, różni się jedynie kinematyką, co przejawia się w tożsamości kwadratów amplitud z dokładnością do zamiany $q \rightarrow -q'$ oraz $q' \rightarrow q$. Możemy więc skorzystać z wyników poprzedniego rachunku uwzględniając powyższą zamianę

$$\sum_a \sum_{\sigma, \sigma_1, \sigma_2} |-iM|^2 = \frac{g^6}{32\pi^4 f_a^2} \frac{1}{pq'} [m_q^2(pq') + (pp')(qq') + (qp)(q'p')]. \quad (\text{A.21})$$

Kinematyka tego procesu powoduje jednak, że w odróżnieniu od sytuacji poprzedniej, całkowity przekrój czynny będzie rozbieżny logarytmicznie. Korzystając bowiem z (A.16) i całkując po kątach mamy

$$\sigma_{\text{CM}}^{(2)} = \frac{2N_f}{64} \frac{\alpha_s^3}{\pi^2 f_a^2} \int_{-1}^1 \left(\frac{m_q^2}{k^2} + \frac{5k^2 + 2m_q^2 + 2k(k^2 + m_q^2)x + k^2x^2}{k\sqrt{k^2 + m_q^2 - k^2x}} \right) dx, \quad (\text{A.22})$$

gdzie wysumowaliśmy po zapachach kwarków i uwzględniliśmy analogiczny proces dla antykwarków $a + \bar{q} \leftrightarrow g + \bar{q}$ (skąd czynnik 2) oraz zostawiliśmy niezerową masę kwarku m_q , by zobaczyć jawnie rozbieżność. Po wykonaniu powyższej całki i uwzględnieniu obcięcia w postaci masy Debye'a otrzymamy

$$\sigma_{\text{CM}}^{(2)} = \frac{N_f}{4} \frac{\alpha_s^3}{\pi^2 f_a^2} \left(\log\left(\frac{s}{m_D^2}\right) - \frac{3}{4} \right). \quad (\text{A.23})$$

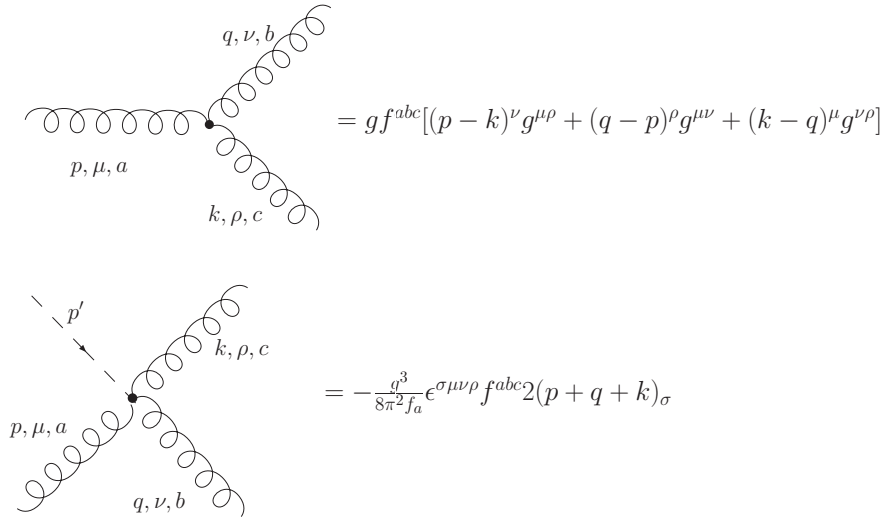
I wreszcie ostatni proces $a + g \leftrightarrow g + g$. W tym przypadku wkład dają aż cztery diagramy, z uwagi na samooddziaływanie gluonów. Musimy więc wpierw dopełnić potrzebne reguły Feynmana o dwa wierzchołki (Rys. A.4). Amplitudy dla poszczególnych diagramów wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} -iM^{(a)} &= -\frac{g^3}{16\pi^2 f_a} \varepsilon_\rho^*(p', \sigma_3) \varepsilon_\nu^*(q', \sigma_2) \varepsilon_\mu(q, \sigma_1) \epsilon^{\alpha\rho\beta\sigma} p'_\alpha (p - p')_\beta \frac{g_{\sigma\gamma}}{(p - p')^2} \cdot \\ & f^{cba} [(p - p' - q)^\nu g^{\gamma\mu} + (-q' - p + p')^\mu g^{\gamma\nu} + (q + q')^\gamma g^{\mu\nu}], \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} -iM^{(b)} &= -\frac{g^3}{16\pi^2 f_a} \varepsilon_\rho^*(p', \sigma_3) \varepsilon_\nu^*(q', \sigma_2) \varepsilon_\mu(q, \sigma_1) \epsilon^{\alpha\nu\beta\sigma} q'_\alpha (p - q')_\beta \frac{g_{\sigma\gamma}}{(p - p')^2} \cdot \\ & f^{bca} [(p - q' - q)^\rho g^{\gamma\mu} + (-p' - p + q')^\mu g^{\gamma\rho} + (q + p')^\gamma g^{\mu\rho}], \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

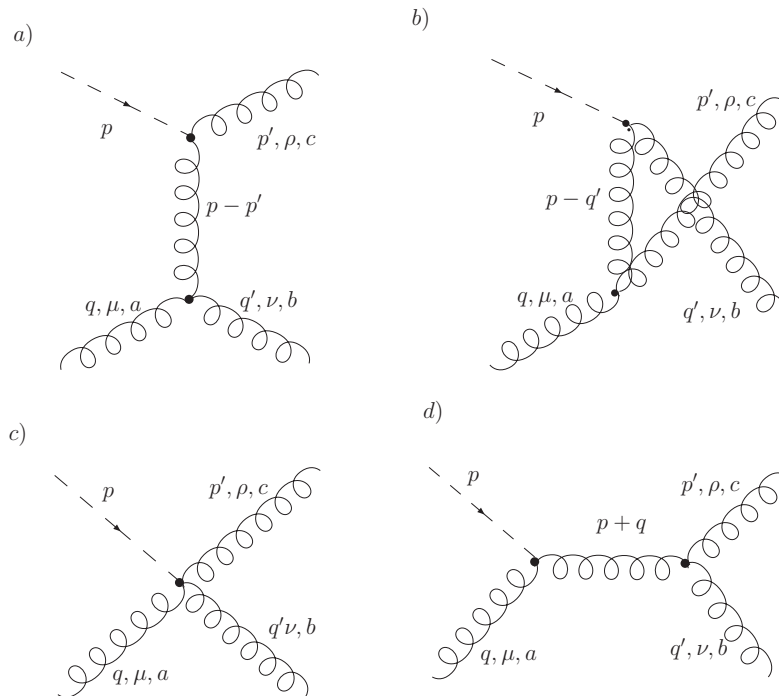
$$-iM^{(c)} = -\frac{g^3}{4\pi^2 f_a} \varepsilon_\rho^*(p', \sigma_3) \varepsilon_\nu^*(q', \sigma_2) \varepsilon_\mu(q, \sigma_1) \epsilon^{\sigma\mu\nu\rho} f^{abc} (q - p' - q')_\sigma, \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} -iM^{(d)} &= \frac{g^3}{16\pi^2 f_a} \varepsilon_\rho^*(p', \sigma_3) \varepsilon_\nu^*(q', \sigma_2) \varepsilon_\mu(q, \sigma_1) \epsilon^{\alpha\sigma\beta\nu} q_\beta (p + q)_\alpha \frac{g_{\sigma\gamma}}{(p + q)^2} \cdot \\ & f^{acb} [(p + q' + q)^\rho g^{\gamma\mu} + (-p' - p - q)^\nu g^{\gamma\rho} + (-q' + p')^\gamma g^{\nu\rho}]. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$



Rysunek A.4: Dodatkowe reguły Feynmana dla procesu $a + g \leftrightarrow g + g$ (wszystkie pędy traktujemy jako wchodzące do wierzchołka).

Dalej rachunki są analogiczne do poprzednich przypadków, jednak występuje o wiele więcej członów, gdyż musimy dodać te cztery amplitudy i podnieść do kwadratu, co daje ich łącznie 16. Po skorzystaniu z (A.7) ich liczba maleje co prawda do 10, jednak rozpisanie nawiasów w amplitudach oraz skorzystanie z (A.13) (i także podobnych wzorów na zwężenie ϵ po dwóch i trzech wskaźnikach), znów bardzo je rozmnaża. Potem należy skorzystać ze wzoru na sumę po wskaźnikach stałych struktury grupy $SU(3)$ i przejść do układu środka masy za pomocą (A.16), a następnie podstawić otrzymane wyrażenie do (A.5) i wykonać całkowania po kątach.



Rysunek A.5: Diagramy Feynmana dla procesu $a + g \leftrightarrow g + g$.

Ponieważ jak widać w metodzie obliczeń nie ma niczego nowego, pozwolimy sobie opuścić szczegółowe wyprowadzenie i podamy końcowy wynik

$$\sigma_{\text{CM}}^{(3)} = \frac{\alpha_s^3}{5\pi^2 f_a^2} \left(\frac{15}{2} \log\left(\frac{s}{m_D^2}\right) - \frac{55}{8} \right). \quad (\text{A.28})$$

Dysponujemy już poszczególnymi przekrojami czynnymi, możemy więc policzyć Γ_i wstawiając ich wartości do (A.4). Ponieważ wszystkie cząstki traktujemy jako bezmasowe, to otrzymamy tym sposobem całkę (korzystając z (4.23) na n_a^{eq})

$$\Gamma_i = \frac{T^3}{(2\pi)^2 \zeta(3)} \int_0^\infty \frac{k_a^2 dk_a}{e^{k_a} \pm 1} \int_0^\infty \frac{k_i^2 dk_i}{e^{k_i} \pm 1} \sigma_{\text{CM}}^{(i)}. \quad (\text{A.29})$$

Ponieważ $\sigma_{\text{CM}}^{(i)}$ ma ogólną postać

$$\sigma_{\text{CM}}^{(i)} = A \log\left(\frac{s}{m_D^2}\right) + B, \quad (\text{A.30})$$

gdzie A i B to stałe wyznaczone wyżej, to mamy do obliczenia kombinacje całek postaci

$$I^\pm = \frac{1}{\zeta(3)} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{e^k \pm 1} \quad (\text{A.31})$$

oraz

$$J^\pm = \frac{1}{\zeta(3)} \int_0^\infty dk \frac{k^2 \log k}{e^k \pm 1}. \quad (\text{A.32})$$

Całki te można policzyć analitycznie np. korzystając z rozwinięcia mianownika w szereg geometryczny i definicji funkcji zeta Riemanna. Otrzymuje się wyniki liczbowe

$$I^+ = \frac{3}{2} \quad J^+ = \frac{1}{4} \left(9 + \log 4 - 6\gamma + 6 \frac{\zeta'(3)}{\zeta(3)} \right), \quad (\text{A.33})$$

$$I^- = 2 \quad J^- = 3 - 2\gamma + 2 \frac{\zeta'(3)}{\zeta(3)}, \quad (\text{A.34})$$

gdzie $\gamma = 0,5772\dots$ to stała gamma Eulera, natomiast pochodna zeta Riemanna w punkcie 3 wynosi $\zeta'(3) = -0,1981\dots$. Wstawiając przekroje czynne i korzystając z tych całek otrzymujemy wyniki

$$\Gamma_1 = \frac{N_f T^3 \zeta(3)}{4 \cdot 6} \frac{\alpha_s^3}{\pi^4 f_a^2}, \quad (\text{A.35})$$

$$\Gamma_2 = \frac{N_f T^3 \zeta(3)}{4 \cdot 2} \frac{\alpha_s^3}{\pi^4 f_a^2} \left(J^+ + \frac{3}{4} J^- - \frac{3}{2} \log(2\pi\alpha_s) - \frac{15}{8} \right), \quad (\text{A.36})$$

$$\Gamma_3 = \frac{3T^3 \zeta(3)}{2} \frac{\alpha_s^3}{\pi^4 f_a^2} \left(J^- - \log(2\pi\alpha_s) - \frac{17}{12} \right). \quad (\text{A.37})$$

Liczbowo, używając wartości $\alpha_s \approx 1/35$ dla energii rzędu 10^{12} GeV, daje to sumarycznie

$$\Gamma = 1,6 \cdot 10^{-6} \frac{T^3}{f_a^2}, \quad (\text{A.38})$$

czyli wartość z której uprzednio korzystaliśmy.²

²Powyższy rachunek wzorowany był na uprzednio cytowanej pracy [55], w której Masso, Rota i Zsembinszki podali wyniki podobnych obliczeń. Otrzymany wynik różni się jednak czynnikiem liczbowym rzędu $O(1)$ we wzorach na przekroje czynne. Mimo usilnych starań nie udało się znaleźć przyczyny niezgodności. Postanowiliśmy kwestię dokładnej wartości współczynnika liczbowego pozostawić otwartą. Warto jednak podkreślić, że rachunek ten stanowi i tak jedynie oszacowanie co do rzędu wielkości, chociażby ze względu na ograniczenie liczby procesów wziętych pod uwagę. W związku z tym różnica w czynniku rzędu jedności nie zmienia wniosków fizycznych i tym samym nie ma dużego znaczenia.